

1.1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Ορισμός του διανύσματος

☀ **Διάνυσμα** $\vec{AB}$ είναι το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο A και τέλος το B.

☀ **Μηδενικό διάνυσμα** είναι το διάνυσμα που έχει ίδια αρχή και τέλος.

☀ **Μέτρο** του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι το μήκος του και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$.

☀ Αν ένα διάνυσμα $\vec{AB}$ έχει μέτρο 1, λέγεται **μοναδιαίο** διάνυσμα.

☀ **Φορέας** του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα.

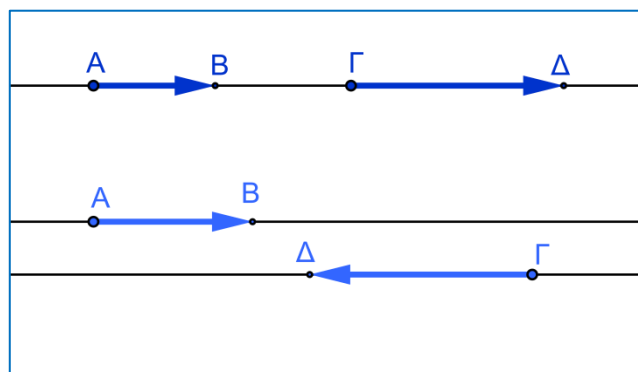
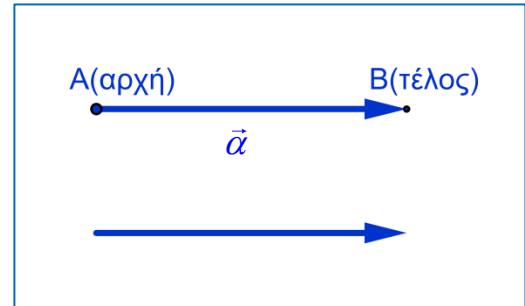
Φορέας ενός μηδενικού διανύσματος $\vec{AA}$ θεωρείται οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A.

Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\vec{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ , τότε λέμε ότι το $\vec{AB}$ είναι παράλληλο προς τη ζ και γράφουμε $\vec{AB} // \zeta$.

☀ Δύο διανύσματα που έχουν τους ίδιους ή παράλληλους φορείς λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά**

διανύσματα ($\vec{AB} // \vec{\Gamma\Delta}$).

☀ Όταν δύο διανύσματα είναι συγγραμμικά λέμε ότι έχουν την **ίδια διεύθυνση**.



☀ Δύο συγγραμμικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα**

($\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta}$) όταν:

α. Έχουν διαφορετικούς φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την ευθεία ΑΓ ή

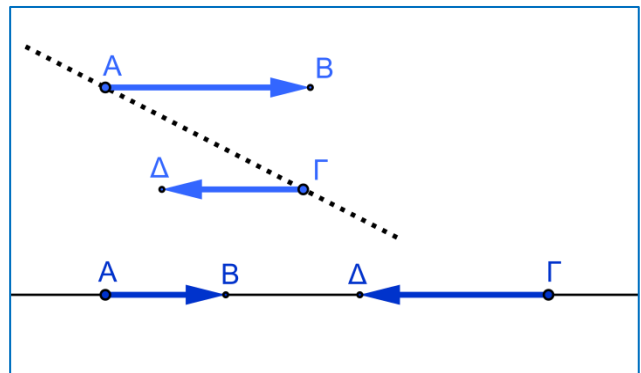
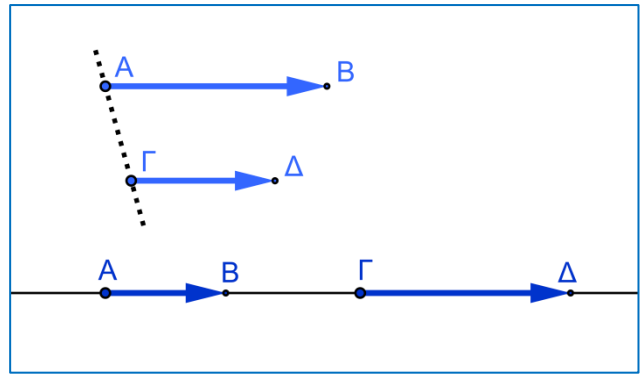
β. Έχουν τον ίδιο φορέα και η μια από τις ημιευθείες ΑΒ και ΓΔ περιέχει την άλλη.

Όταν δύο διανύσματα είναι ομόρροπα έχουν **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και φορά)

☀ Δύο συγγραμμικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα**

($\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma\Delta}$) όταν δεν είναι ομόρροπα.

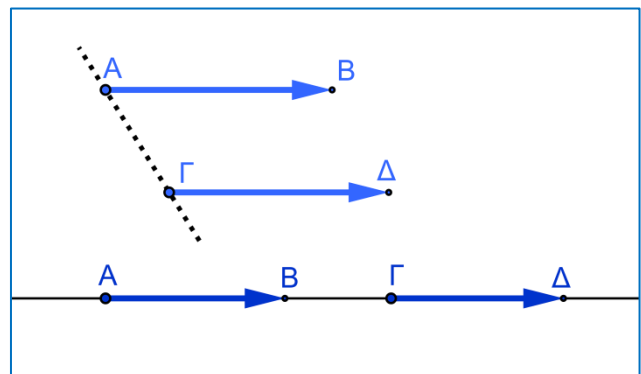
Όταν δύο διανύσματα είναι αντίρροπα έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά)



Ίσα διανύσματα

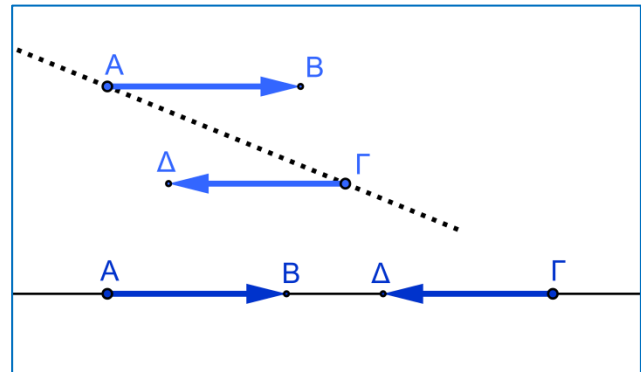
Δύο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ίσα** όταν έχουν ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα ($\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$).

Το Μ είναι το **μέσο** του διανύσματος $\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{MB}$



Αντίθετα διανύσματα

Δύο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίθετα** όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα ($\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta}$). Δηλαδή $\vec{AB} = -\vec{BA}$



Παραδείγματα:

Π.1.1. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ να εξεταστεί αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

α. $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$

β. $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$

γ. $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$

δ. $|\vec{A\Gamma}| = |\vec{B\Delta}|$

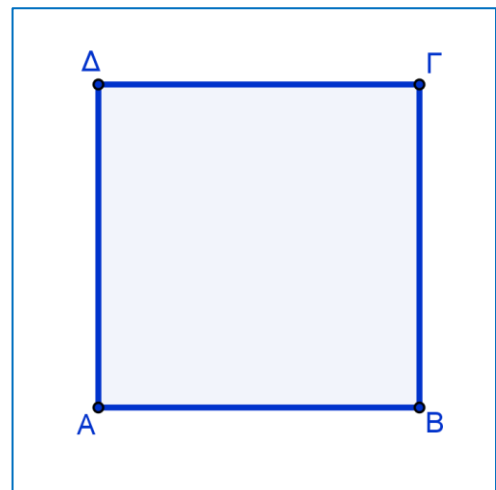
Απάντηση

α. Λάθος γιατί τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, δηλαδή $\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta}$

β. Σωστό αφού τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{B\Gamma}$ έχουν ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

γ. Λάθος γιατί τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Delta}$ δεν έχουν ίδια κατεύθυνση.

δ. Σωστό αφού οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι ίσες σε μήκη.



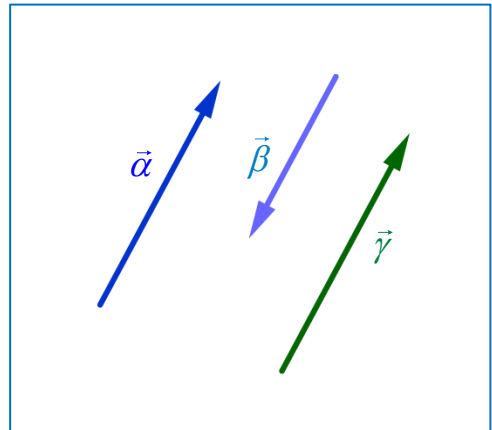
Π.1.2. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow -\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\uparrow -\vec{\gamma}$ τότε θα είναι $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$;

Απάντηση

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \uparrow\uparrow -\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$$

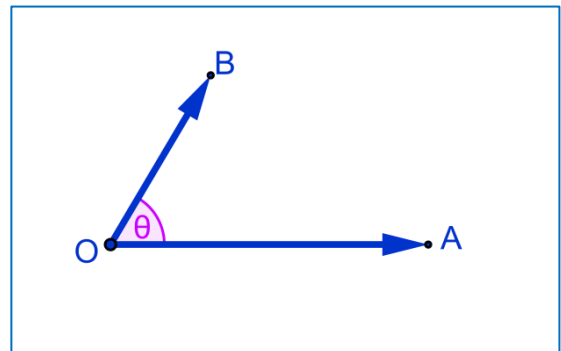
$$\text{και } \vec{\beta} \uparrow\uparrow -\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$$

$$\text{Άρα } \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$$



Γωνία διανυσμάτων

Αν με αρχή ένα σημείο Ο πάρουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$, τότε την κυρτή γωνία $\hat{AOB}$ που ορίζουν οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ την ονομάζουμε **γωνία** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και την



συμβολίζουμε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ ή $(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$ ή με ένα μικρό γράμμα για παράδειγμα θ.

$$\text{Είναι } 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\Rightarrow \text{Όταν } \theta = 0 \text{ είναι } \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \text{Όταν } \theta = \pi \text{ είναι } \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \text{Όταν } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ είναι } \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$$

Παραδειγμα:

Π.1.3. Να εξεταστεί αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

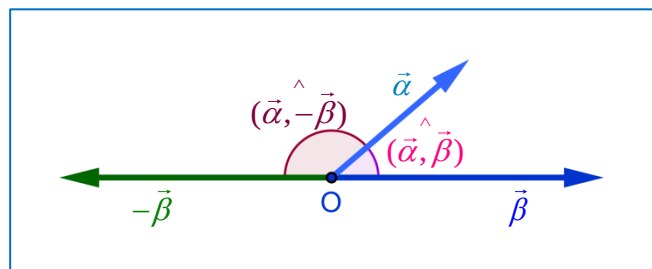
α. $\left(\vec{\alpha}, -\vec{\beta} \right) = \pi - \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right)$

β. $0 \leq \eta\mu \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) \leq 1$

γ. Αν $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\beta}$ τότε $\sigma\upsilon\nu \left(\vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right) = 1$

Απάντηση

α. Η πρόταση είναι σωστή αφού τα $\vec{\beta}$ και $-\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα διανύσματα.



β. Η πρόταση είναι σωστή αφού $0 \leq \theta \leq \pi$

γ. Είναι $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\gamma} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$. Άρα $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$ κι έτσι

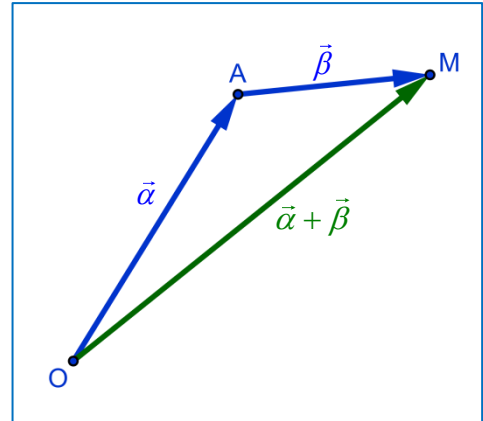
$\left(\vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \left(\vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right) = 1$. Επομένως η πρόταση είναι σωστή.

1.2. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Πρόσθεση διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή τυχαίο σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και με αρχή το A διάνυσμα $\vec{AM} = \vec{\beta}$. Τότε το διάνυσμα $\vec{OM}$ είναι το **άθροισμα ή συνισταμένη** των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

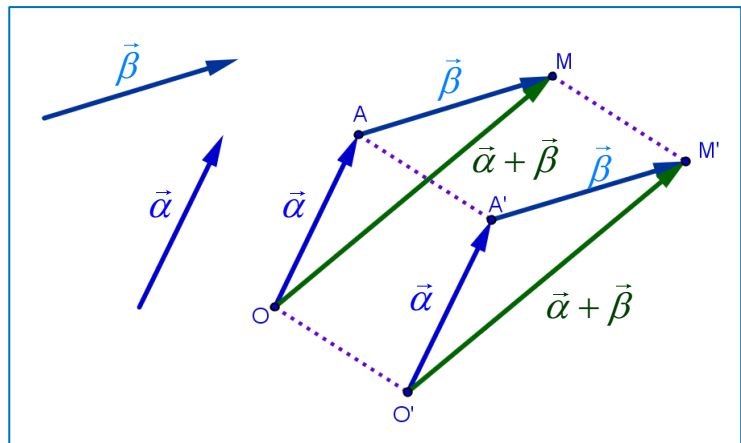
Δηλαδή $\vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM}$

Πρόταση:

Το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου O .

Απόδειξη:

Αν O' είναι ένα άλλο σημείο και πάρουμε τα διανύσματα $\vec{O'A'} = \vec{\alpha}$ και $\vec{A'M'} = \vec{\beta}$, επειδή $\vec{OA} = \vec{O'A'} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AM} = \vec{A'M'} = \vec{\beta}$, έχουμε $\vec{OO'} = \vec{AA'}$ και $\vec{AA'} = \vec{MM'}$. Επομένως, $\vec{OO'} = \vec{MM'}$, που συνεπάγεται ότι και $\vec{OM} = \vec{O'M'}$.



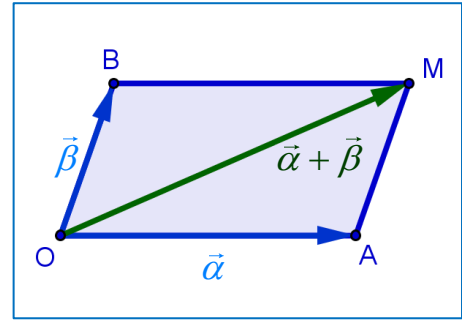
Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο **κανόνα του παραλληλογράμμου**.

Δηλαδή με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε τα

διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$ και τότε το

άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο OM του

παραλληλογράμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB.



Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων

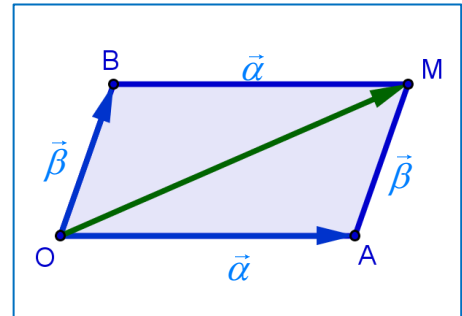
★ $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική)

Απόδειξη:

Από το σχήμα έχουμε: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM}$

και $\vec{\beta} + \vec{\alpha} = \vec{OB} + \vec{BM} = \vec{OM}$

Επομένως, $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$.



★ $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική)

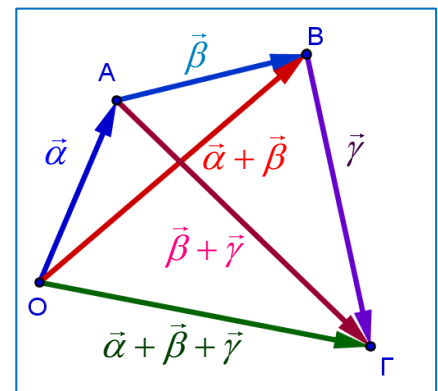
Απόδειξη:

Από το σχήμα έχουμε:

$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BG} = \vec{OB} + \vec{BG} = \vec{OG}$

Και $\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BG}) = \vec{OA} + \vec{AG} = \vec{OG}$

Επομένως, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$.



★ $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$

★ $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

Αφαίρεση διανυσμάτων

Για την αφαίρεση διανυσμάτων είναι $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$

Έτσι $\vec{x} + \vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

Διάνυσμα θέσεως

Αν Ο ένα σταθερό σημείο του χώρου, για κάθε σημείο Μ του χώρου, το διάνυσμα $\vec{OM}$ λέγεται **διάνυσμα θέσεως του Μ** ή **διανυσματική ακτίνα του Μ** και το σημείο Ο που είναι κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{AB}$ έχουμε $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ και επομένως $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$
Δηλαδή:

Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

διανυσματική ακτίνα
πέρατος

διανυσματική ακτίνα
αρχής

Παραδείγματα:

Π.1.4. Αν Α, Β, Γ, Δ τέσσερα σημεία, να συμπληρώσετε της ισότητες:

α. $\vec{AG} - \vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Delta B} = \dots\dots\dots$

β. $\vec{A\Delta} + \vec{\Delta B} - \vec{\Gamma B} - \vec{A\Gamma} = \dots\dots\dots$

Απάντηση

α. Είναι $\vec{AG} - \vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Delta B} = \vec{AG} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta B} = \vec{A\Delta} + \vec{\Delta B} = \vec{AB}$

β. Είναι $\vec{A\Delta} + \vec{\Delta B} - \vec{\Gamma B} - \vec{A\Gamma} = (\vec{A\Delta} + \vec{\Delta B}) - (\vec{\Gamma B} + \vec{A\Gamma}) = \vec{AB} - \vec{AB} = \vec{0}$

Π.1.5. Να εξεταστεί αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

α. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AD} + \vec{DG}$.

β. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GD} + \vec{DA} = \vec{0}$

γ. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $AB + BG + GD + DA = 0$.

Απάντηση

α. Η πρόταση είναι σωστή αφού $\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AD} + \vec{DG} \Leftrightarrow \vec{AG} = \vec{AG}$ που ισχύει.

β. Η πρόταση είναι σωστή αφού $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GD} + \vec{DA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AA} = \vec{0}$ που ισχύει.

γ. Η πρόταση είναι λάθος αφού τα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ είναι μέτρα διανυσμάτων και δεν ισχύουν οι αντίστοιχες σχέσεις που ισχύουν στην πρόσθεση διανυσμάτων.

Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Η ισότητα $\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ισχύει όταν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$

ενώ η ισότητα $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ισχύει όταν $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$

Παράδειγμα:

Π.1.4. Αν $\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| = |\vec{a} - \vec{b}|$ τότε είναι $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$;

Απάντηση

Έχουμε $\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow \left| |\vec{a}| - |-\vec{b}| \right| = |\vec{a} + (-\vec{b})| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Να γράψετε σαν ένα διάνυσμα τα παρακάτω αθροίσματα:

α. $\vec{ΑΓ} + \vec{ΔΑ} - \vec{ΔΓ}$

β. $\vec{ΑΓ} - \vec{ΒΔ} - \vec{ΔΓ} - \vec{ΕΒ}$

Λύση

α. Είναι $\vec{ΑΓ} + \vec{ΔΑ} - \vec{ΔΓ} = \vec{ΑΓ} + \vec{ΔΑ} + \vec{ΓΔ} =$
 $= \vec{ΑΓ} + \vec{ΓΔ} + \vec{ΔΑ} = \vec{ΑΑ} = \vec{0}$

β. Είναι $\vec{ΑΓ} - \vec{ΒΔ} - \vec{ΔΓ} - \vec{ΕΒ} =$
 $= \vec{ΑΓ} + \vec{ΔΒ} + \vec{ΓΔ} + \vec{ΒΕ} =$
 $= \vec{ΑΓ} + \vec{ΓΔ} + \vec{ΔΒ} + \vec{ΒΕ} = \vec{ΑΕ}$

Μέθοδος

Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$\vec{ΑΒ} = -\vec{ΒΑ}$ και μετατρέπουμε

τις διαφορές σε αθροίσματα.

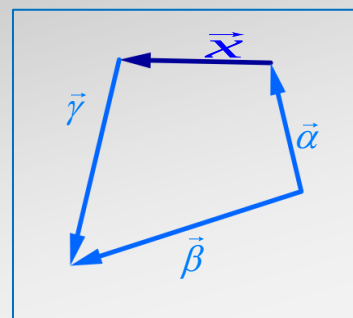
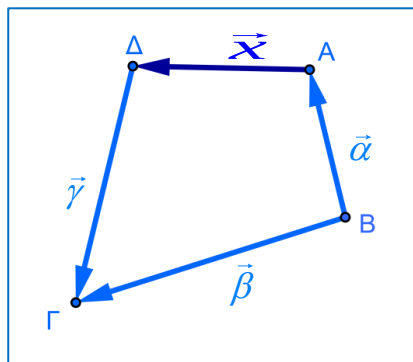
Γράφουμε τα διανύσματα σε

σειρά ώστε το τέλος του ενός να

είναι αρχή του επόμενου ώστε να γίνεται πρόσθεση.

1.2. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ στο διπλανό σχήμα ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται.

(Σχολικό βιβλίο – Α3)

ΛύσηΜέθοδος

Ονομάζουμε τις κορυφές και

κινούμαστε είτε δεξιόστροφα

είτε αριστερόστροφα από

οποιοδήποτε σημείο θέλουμε.

Ξεκινώντας από το Α και κινούμενοι δεξιόστροφα θα πάρουμε:

$$\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GL} + \vec{LA} = \vec{0} \Leftrightarrow -\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

(Αν για παράδειγμα ξεκινούσαμε από το Γ και κινούμασταν αριστερόστροφα, θα

$$\text{είχαμε: } \vec{GB} + \vec{BA} + \vec{AL} + \vec{LG} = \vec{0} \Leftrightarrow -\vec{\beta} + \vec{\alpha} + \vec{x} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

κι έτσι θα καταλήγαμε στο ίδιο αποτέλεσμα)

1.3. Να αποδείξετε ότι σε οποιοδήποτε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει:

$$\vec{AB} + \vec{GD} = \vec{AD} + \vec{GB}$$

Λύση

α' τρόπος

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \vec{AB} + \vec{GD} &= \\ &= (\vec{AD} + \vec{DB}) + (\vec{GB} + \vec{BD}) = \\ &= \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{GB} + \vec{BD} = \\ &= (\vec{AD} + \vec{GB}) + (\vec{BD} + \vec{DB}) = \vec{AD} + \vec{GB} \end{aligned}$$

β' τρόπος

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{AB} + \vec{GD} &= \vec{AD} + \vec{GB} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} &= \vec{GB} - \vec{GD} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{DB} &= \vec{DB} \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

γ' τρόπος

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{AB} + \vec{GD} &= \vec{AD} + \vec{GB} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{OB} - \vec{OA} + \vec{OD} - \vec{OG} &= \\ = \vec{OD} - \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OG} &\text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

Μέθοδος

Γράφουμε το πρώτο μέρος ως αθροίσματα, εμφανίζοντας τα διανύσματα του δεύτερου μέρους

Μέθοδος

Μεταφέρουμε τα διανύσματα από ένα μέλος σε άλλο έτσι ώστε να μπορούν να γίνουν πράξεις μεταξύ τους.

Μέθοδος

Θεωρούμε τυχαίο σημείο αναφοράς και εκφράζουμε όλα τα διανύσματα σαν αφαιρέσεις διανυσμάτων με αρχή το επιλεγμένο σημείο αναφοράς.

1.4. Αν ισχύει $\vec{\Delta\Gamma} - \vec{AB} - \vec{E\Gamma} = \vec{\Gamma Z} - \vec{AZ}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε ταυτίζονται.

Λύση

Θα δείξουμε ότι $\vec{\Delta E} = \vec{0}$

$$\text{Είναι } \vec{\Delta\Gamma} - \vec{AB} - \vec{E\Gamma} = \vec{\Gamma Z} - \vec{AZ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} - \vec{AB} - \vec{E\Gamma} - \vec{\Gamma Z} + \vec{AZ} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} + \vec{BA} + \vec{AZ} + \vec{Z\Gamma} + \vec{\Gamma E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Delta E} = \vec{0}$$

$$\text{Ή αλλιώς } \vec{\Delta\Gamma} - \vec{AB} - \vec{E\Gamma} = \vec{\Gamma Z} - \vec{AZ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OB} - \vec{OA} - (\vec{OB} - \vec{OA}) - (\vec{OG} - \vec{OE}) = \vec{OZ} - \vec{OG} - (\vec{OZ} - \vec{OA}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OB} - \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OA} - \vec{OG} + \vec{OE} = \vec{OZ} - \vec{OG} - \vec{OZ} + \vec{OA} \Leftrightarrow$$

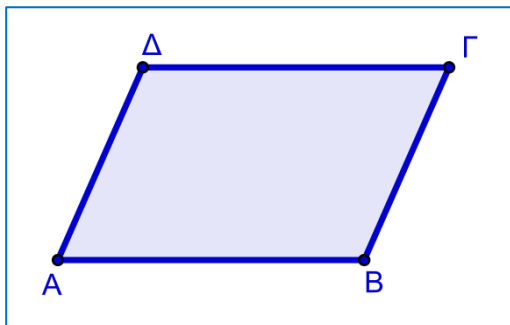
$$\Leftrightarrow \vec{OE} - \vec{OA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Delta E} = \vec{0}$$

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι δύο σημεία Α και Β ταυτίζονται, αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{AB} = \vec{0}$.

1.5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΔ και τυχαίο σημείο Κ. Ορίζουμε σημείο Γ από τη σχέση $\vec{K\Gamma} = \vec{AK} + \vec{KB} + \vec{KD}$. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



$$\text{Είναι } \vec{K\Gamma} = \vec{AK} + \vec{KB} + \vec{KD} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{K\Gamma} - \vec{KB} = \vec{AK} + \vec{KD} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{B\Gamma} = \vec{AD}$$

Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$ ή $\vec{AD} = \vec{B\Gamma}$ και ότι τρία σημεία από τα Α, Β, Γ και Δ, δεν είναι συνευθειακά.

1.6. Αν ισχύει $\vec{A\Delta} + \vec{EB} + \vec{\Gamma A} = \vec{B\Delta} - \vec{AE}$, να δείξετε ότι το B είναι μέσο του ΑΓ.

Λύση

Θα δείξουμε ότι $\vec{AB} = \vec{B\Gamma}$.

Έτσι στην δοθείσα γράφουμε τα διανύσματα με αρχή το B:

$$\begin{aligned} \vec{A\Delta} + \vec{EB} + \vec{\Gamma A} &= \vec{B\Delta} - \vec{AE} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{B\Delta} - \vec{BA} - \vec{BE} + \vec{BA} - \vec{B\Gamma} &= \\ = \vec{B\Delta} - \vec{BE} + \vec{BA} &\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{B\Gamma} \end{aligned}$$

Μέθοδος

Για να δείξουμε ότι το B είναι μέσο του ΑΓ αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{AB} = \vec{B\Gamma}$.

1.7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ με $|\vec{AB}| = 2$ και $|\vec{B\Gamma}| = 4$. Αν Δ και Ε τυχαία σημεία, να δείξετε ότι: $2 \leq |\vec{E\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} - \vec{EA}| \leq 6$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{E\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} - \vec{EA} &= \\ = \vec{AE} + \vec{E\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} &= \vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} \left| |\vec{AB}| - |\vec{B\Gamma}| \right| &\leq \left| \vec{AB} + \vec{B\Gamma} \right| \leq |\vec{AB}| + |\vec{B\Gamma}| \\ \Rightarrow |2 - 4| &\leq \left| \vec{AB} + \vec{B\Gamma} \right| \leq 2 + 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 &\leq \left| \vec{E\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} - \vec{EA} \right| \leq 6 \end{aligned}$$

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ανίσωση με μέτρο διανύσματος, εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα:

$$||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

1.8. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ όταν:

α. $\left| \vec{AB} - \vec{\Gamma A} + \vec{BM} - \vec{M\Gamma} \right| = 4$

β. $\left| \vec{AB} - \vec{MB} \right| = \left| \vec{A\Gamma} - \vec{B\Gamma} + \vec{MA} \right|$

Λύση

α. Είναι

$$\begin{aligned} \left| \vec{AB} - \vec{\Gamma A} + \vec{BM} - \vec{M\Gamma} \right| &= 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left| \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma M} \right| &= 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left| \vec{AM} + \vec{AM} \right| &= 4 \Leftrightarrow \left| 2\vec{AM} \right| = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\left| \vec{AM} \right| &= 4 \Leftrightarrow \left| \vec{AM} \right| = 2 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι ο κύκλος με κέντρο το Α και ακτίνα $\rho = 2$.

β. Είναι $\left| \vec{AB} - \vec{MB} \right| = \left| \vec{A\Gamma} - \vec{B\Gamma} + \vec{MA} \right| \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left| \vec{AB} + \vec{BM} \right| &= \left| \vec{MA} + \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma B} \right| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left| \vec{AM} \right| &= \left| \vec{MB} \right| \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

Μέθοδος

Αν Κ σταθερό σημείο και ισχύει

$\left| \vec{KM} \right| = \rho > 0$, ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ είναι ο κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα ρ .

Μέθοδος

Αν Α, Β σταθερά σημεία και

ισχύει $\left| \vec{AM} \right| = \left| \vec{BM} \right|$, ο

γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.9. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α.** Ποιο διάνυσμα ονομάζεται μηδενικό;
- β.** Τι ονομάζουμε μέτρο ενός διανύσματος και πώς συμβολίζεται;
- γ.** Ποιο διάνυσμα ονομάζεται μοναδιαίο;
- δ.** Τι ονομάζεται φορέας ενός διανύσματος;
- ε.** Πότε δύο διανύσματα ονομάζονται παράλληλα ή συγγραμικά;
- στ.** Πότε δύο διανύσματα ονομάζονται ίσα και πότε αντίθετα;
- ζ.** Πώς ορίζεται η γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων;

1.10. Αν Α, Β, Γ και Δ είναι τέσσερα σημεία, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

- | | |
|---|--|
| α. $\vec{AB} + \vec{BG} = \dots$ | β. $\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma} = \dots$ |
| γ. $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{\Gamma\Delta} = \dots$ | δ. $\vec{B\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} = \dots$ |
| ε. $\vec{AB} - \vec{\Delta B} + \vec{\Delta\Gamma} = \dots$ | στ. $\vec{AB} - \vec{\Delta B} = \dots$ |
| ζ. $\vec{\Gamma B} + \vec{B\Delta} - \vec{A\Delta} = \dots$ | η. $\vec{A\Delta} + \vec{\Delta B} + \vec{B\Delta} = \dots$ |
| θ. $\vec{AB} + \vec{B\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} - \vec{A\Gamma} = \dots$ | |

1.11. Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ) σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- | | | |
|---|------------------------------|------------------------------|
| α. $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$ | (Σ) ☐ | (Λ) ☐ |
| β. $\vec{AB} = \vec{B\Delta}$ | (Σ) ☐ | (Λ) ☐ |
| γ. $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ | (Σ) ☐ | (Λ) ☐ |
| δ. $\vec{AB} = \vec{A\Delta}$ | (Σ) ☐ | (Λ) ☐ |
| ε. $ \vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma} $ | (Σ) ☐ | (Λ) ☐ |
| στ. $ \vec{AB} = \vec{B\Gamma} $ | (Σ) ☐ | (Λ) ☐ |

1.12. Να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. (Σ) ☐ (Λ) ☐

β. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα. (Σ) ☐ (Λ) ☐

γ. Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τέλους συν τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του. (Σ) ☐ (Λ) ☐

δ. Τα συγγραμικά διανύσματα είναι πάντοτε ομόρροπα. (Σ) ☐ (Λ) ☐

ε. Δύο μη συγγραμικά διανύσματα δεν έχουν την ίδια διεύθυνση. (Σ) ☐ (Λ) ☐

στ. Τα αντίθετα διανύσματα είναι και αντίρροπα (Σ) ☐ (Λ) ☐

ζ. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\uparrow -\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$ (Σ) ☐ (Λ) ☐

η. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow -\vec{\beta}$ τότε $-\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ (Σ) ☐ (Λ) ☐

θ. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει

$(-\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 180^\circ - (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ (Σ) ☐ (Λ) ☐

ι. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$. (Σ) ☐ (Λ) ☐

ια. Αν $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$. (Σ) ☐ (Λ) ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1.13. Να γράψετε σαν ένα διάνυσμα τα παρακάτω αθροίσματα:

α. $\vec{KL} + \vec{MN} + \vec{LM} + \vec{NP}$

β. $\vec{AG} - \vec{BD} - \vec{DG}$

γ. $\vec{KL} - \vec{NM} + \vec{NK} - \vec{ML}$

δ. $\vec{AB} - \vec{ED} + \vec{GD} - \vec{GB}$

1.14. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε ένα τυχαίο σημείο. Να αποδείξετε ότι:

α. $\vec{DA} + \vec{BE} = \vec{GE}$

β. $\vec{AE} + \vec{GE} = \vec{DE} + \vec{BE}$

1.15. Έστω ΑΒΓΔ ένα παραλληλόγραμμο και Ε, Ζ, Η, Θ τυχαία σημεία του επιπέδου. Να γράψετε ως ένα διάνυσμα το άθροισμα:

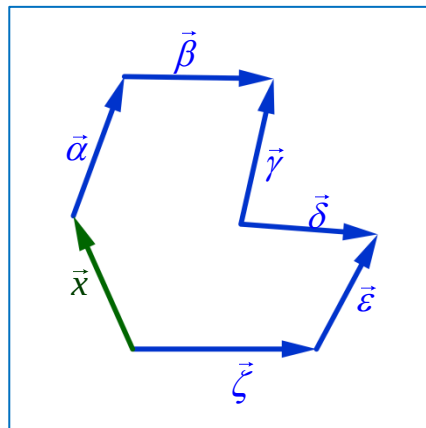
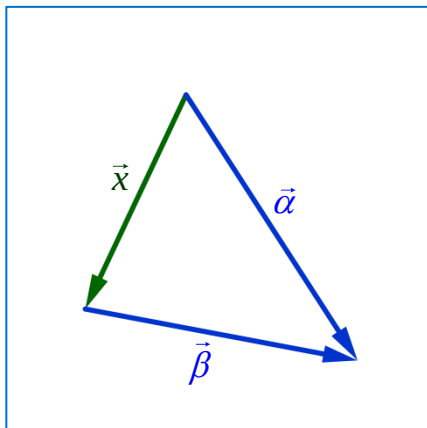
$$\vec{AE} + \vec{AH} + \vec{ZB} + \vec{ΘΔ} + \vec{EZ} + \vec{HΘ}.$$

1.16. Για ένα τυχαίο εξάγωνο $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ να αποδείξετε ότι:

$$\vec{P_1P_3} + \vec{P_2P_4} + \vec{P_3P_5} + \vec{P_4P_6} + \vec{P_5P_1} + \vec{P_6P_2} = \vec{0}$$

(Σχολικό βιβλίο – Α7)

1.17. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:



(Σχολικό βιβλίο – Α3)

1.18. Έστω τα σημεία A, B, Γ, Δ, E . Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{AE} + \vec{BA} = \vec{B\Gamma} - \vec{E\Delta} - \vec{\Delta\Gamma}$$

1.19. Θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ, Δ και E . Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{A\Gamma} - \vec{\Delta E} = \vec{B\Delta} + \vec{E\Gamma} - \vec{BA}$$

1.20. Να αποδείξετε ότι σε οποιοδήποτε εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ ισχύει:

$$\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{EZ} = \vec{\Gamma B} + \vec{E\Delta} + \vec{AZ}$$

1.21. Για τα σημεία A, B, Γ και Δ ισχύει $\vec{AE} + \vec{B\Gamma} = \vec{BE} + \vec{\Delta\Gamma}$. Να δείξετε ότι τα σημεία A και Δ συμπίπτουν.

1.22. Έστω τα σημεία A, B, Γ, Δ, E , ώστε να ισχύει: $\vec{AB} - \vec{A\Gamma} = \vec{\Delta B} - \vec{E\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E συμπίπτουν.

1.23. Αν ισχύει $\vec{\Delta E} - \vec{Z\Gamma} - \vec{\Delta A} = \vec{\Gamma E} - \vec{ZB}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται.

1.24. Έστω ότι ισχύει $\vec{A\Delta} - \vec{B\Delta} = \vec{\Delta E} - \vec{\Delta\Gamma}$ και τα σημεία A, B, Γ και E είναι μη συνευθειακά ανά τρία. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

1.25. Έστω A, B, Γ και Δ σημεία μη συνευθειακά ανά τρία, για τα οποία ισχύει $\vec{A\Gamma} - \vec{E\Gamma} = \vec{AE} + \vec{B\Gamma} - \vec{A\Delta}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

1.26. Αν ισχύει $\vec{A\Delta} - \vec{Z\Gamma} = \vec{BE} + \vec{B\Delta} - \vec{ZE}$ να αποδείξετε ότι το B είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$.

1.27. Αν ισχύει $\vec{AG} - \vec{BE} = \vec{AB} - \vec{BG} + \vec{EA}$ να αποδείξετε ότι το Γ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΔ.

1.28. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να προσδιορίσετε σημείο Μ, ώστε να ισχύει: $\vec{GM} + \vec{DM} - \vec{AM} = \vec{GA} - \vec{BD}$

1.29. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο, ώστε $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} = \vec{MD}$.

1.30. Δίνονται τα αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 3$ και τυχαίο διάνυσμα $\vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\gamma}| + |\vec{\beta} - \vec{\gamma}| \geq 1$

1.31. Δίνονται τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 4$ και τυχαίο διάνυσμα $\vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} - \vec{\beta}| \geq 6$

1.32. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 \leq 5|\vec{\alpha}|^2 + \frac{5}{4}|\vec{\beta}|^2$$

1.33. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ όταν:

$$\alpha. \left| \vec{AB} - \vec{MB} \right| = \left| \vec{AG} - \vec{BG} - \vec{BD} \right| \qquad \beta. \left| \vec{AG} - \vec{MG} \right| = \left| \vec{BG} - \vec{DM} + \vec{DB} \right|$$

1.34. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ, ώστε το διάνυσμα $\vec{BG}$ να είναι μοναδιαίο. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:

$$\left| \vec{MB} - \vec{AB} \right| = \left| \vec{BD} - \vec{GA} - \vec{AD} \right|$$

1.35. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει: $\left| \vec{MA} - \vec{BA} \right| + \left| \vec{M\Gamma} - \vec{BA} + \vec{\Gamma A} \right| = 6$

1.36. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E της πλευράς $\Gamma\Delta$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει:

$$\left| \vec{M\Delta} + \vec{\Gamma B} \right| = \left| \vec{MB} - \vec{EA} - \vec{\Delta\Gamma} \right|$$

1.3. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Ορισμός πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα

Αν $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε το $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι το διάνυσμα το οποίο:

α. Είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$, αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$

β. Έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$

Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε το $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Το γινόμενο $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{\alpha}$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$.

Παρατηρήσεις

1. Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα:

α. Αποδεικνύουμε ότι $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ με $\lambda > 0$ ή

β. Δείχνουμε ότι $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 0$

2. Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα:

α. Αποδεικνύουμε ότι $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ με $\lambda < 0$ ή

β. Δείχνουμε ότι $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \pi$

3. Αν $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\alpha}| = |\lambda| \cdot |\vec{\beta}|$. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

Αν όμως $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$ και $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ (1)

Και αν $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$ και $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\lambda \vec{\beta}$ (2)

Στις (1) και (2) είναι αναγκαστικά $\lambda > 0$

Παραδειγμα:

Π.1.7. Να εξεταστεί αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $\vec{\alpha} = 3\vec{\beta}$ τότε $|\vec{\alpha}| = 3|\vec{\beta}|$

β. Αν $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$ τότε $|\vec{\alpha}| = -2|\vec{\beta}|$

γ. Αν $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$

δ. Αν $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$ και $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$

Απάντηση

α. Σωστή

β. Λάθος. Είναι $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\alpha}| = |-2| \cdot |\vec{\beta}| \Rightarrow |\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$

γ. Λάθος. Θα έπρεπε να γνωρίζουμε ότι είναι και $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$

δ. Λάθος. Είναι $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα

★ $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και ότι $\lambda \neq 0$. Παίρνουμε ένα σημείο

O και σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AB} = \vec{\beta}$. Τότε είναι $\vec{OB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Σχεδιάζουμε

επιπλέον τα διανύσματα $\vec{OA'} = \lambda\vec{\alpha}$ και

$\vec{OB'} = \lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

Επειδή $\frac{(OA')}{(OA)} = \frac{(OB')}{(OB)} = |\lambda|$

τα τρίγωνα OAB και OA'B' είναι όμοια και επομένως η πλευρά A'B' είναι παράλληλη με

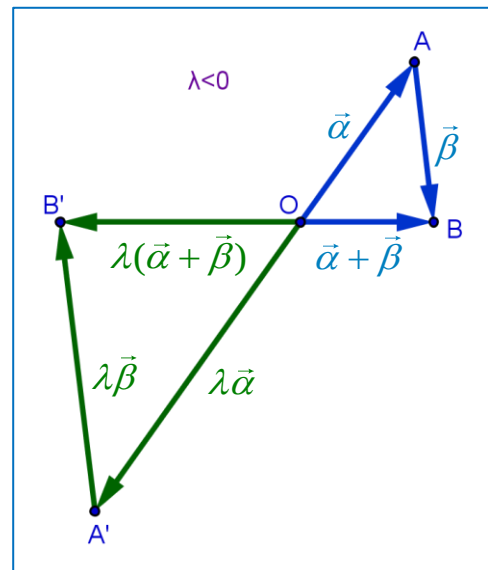
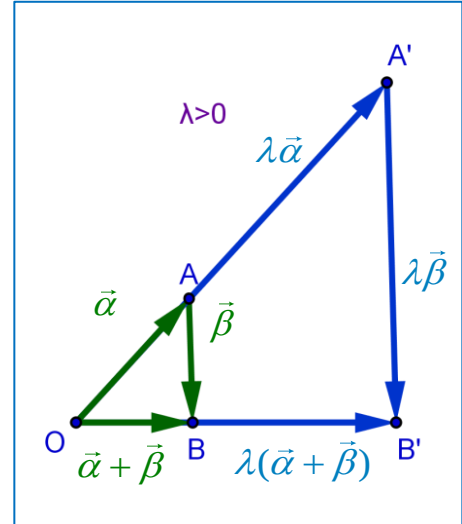
την AB και ισχύει $\frac{(A'B')}{(AB)} = |\lambda|$

Αυτό σημαίνει ότι $\vec{A'B'} = \lambda \vec{AB} = \lambda\vec{\beta}$.

Επομένως, επειδή $\vec{OB'} = \vec{OA'} + \vec{A'B'}$

έχουμε $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

Η ιδιότητα ισχύει προφανώς και όταν ένα τουλάχιστον από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό ή όταν ο αριθμός λ είναι μηδέν.



★ $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$

★ $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

Επίσης έχουμε:

★ $\lambda\vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = 0$

★ $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$

★ $\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$

★ $(\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}$

★ Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

★ Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε $\lambda = \mu$

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{\nu} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός περισσοτέρων διανυσμάτων.

Παραδείγματα:

Π.1.8. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ αλλά και των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ αφού $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} + 0 \cdot \vec{\delta}$.

Π.1.9. Αν το $\vec{\alpha}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τότε το $\vec{\beta}$ είναι σίγουρα γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$;

Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma}$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Τότε $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma} \Leftrightarrow \kappa\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \lambda\vec{\gamma}$ και θα μπορούσαμε να γράψουμε το $\vec{\beta}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ ($\vec{\beta} = \frac{1}{\kappa}\vec{\alpha} - \frac{\lambda}{\kappa}\vec{\gamma}$) αν γνωρίζαμε ότι είναι $\kappa \neq 0$

Συνθήκη παραλληλίας

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη:

Όπως είδαμε, αν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, όπου $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, συνδέονται με τη σχέση $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα αυτά είναι παράλληλα. Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$. Πράγματι, αν θέσουμε

$$\kappa = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} \text{ τότε } |\vec{\alpha}| = \kappa |\vec{\beta}|. \text{ Συνεπώς:}$$

$$\Rightarrow \text{Αν } \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \text{ τότε } \vec{\alpha} = \kappa \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \text{Αν } \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \text{ τότε } \vec{\alpha} = -\kappa \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \text{Αν } \vec{\alpha} = \vec{0} \text{ τότε } \vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση υπάρχει λ και μάλιστα μοναδικός τέτοιος, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$.

Παρατήρηση

Αν $\lambda \vec{\alpha} = \mu \vec{\beta}$ και τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, θα είναι $\lambda = \mu = 0$

Απόδειξη:

$$\text{Αν } \lambda \neq 0 \text{ τότε } \vec{\alpha} = \frac{\mu}{\lambda} \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} // \vec{\beta} \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

$$\text{Αν } \mu \neq 0 \text{ τότε } \vec{\beta} = \frac{\lambda}{\mu} \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} // \vec{\beta} \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

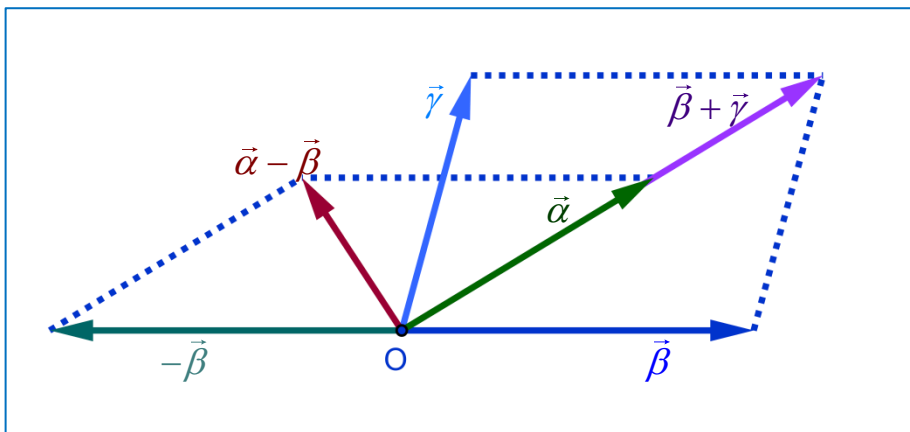
Άρα $\lambda = \mu = 0$

Παραδείγματα:

Π.1.10. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ τότε $\vec{\gamma} \uparrow\uparrow \vec{\alpha} - \vec{\beta}$;

Απάντηση

Όχι γιατί η παραλληλία δεν είναι πράξη διανυσμάτων για να εργαζόμαστε παρόμοια. Στο σχήμα φαίνεται ότι η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει σε μια τυχαία τριάδα διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$



Π.1.11. Να βρεθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$ όταν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$(x-1)\vec{AB} + (y+1)\vec{A\Gamma} = \vec{0}$$

Απάντηση

$$\text{Είναι } (x-1)\vec{AB} + (y+1)\vec{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow (x-1)\vec{AB} = -(y+1)\vec{A\Gamma}$$

Αφού τα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα θα είναι $x-1=0$ και $-(y+1)=0$.

Άρα $x=1$ και $y=-1$

Π.1.12. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μη παράλληλα διανύσματα να βρεθεί ο $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $4\vec{\alpha} + x\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

Απάντηση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } x\vec{\alpha} + \vec{\beta} // 4\vec{\alpha} + x\vec{\beta} &\Leftrightarrow x\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \lambda(4\vec{\alpha} + x\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 4\lambda\vec{\alpha} + \lambda x\vec{\beta} \Leftrightarrow x\vec{\alpha} - 4\lambda\vec{\alpha} = \lambda x\vec{\beta} - \vec{\beta} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 4\lambda)\vec{\alpha} = (\lambda x - 1)\vec{\beta} \Leftrightarrow (\text{αφού } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ μη παράλληλα}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4\lambda = 0 \\ \lambda x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x}{4} \\ \frac{x^2}{4} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x}{4} \\ x = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Συνευθειακά σημεία

Τρία σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν δύο διανύσματα (όχι αντίθετα) που δημιουργούνται από τα A, B, Γ είναι παράλληλα (π.χ. $\vec{AB} // \vec{AG}$).

Παράδειγμα:

Π.1.13. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{AG} = 2\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$ και $\vec{AD} = -\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ τότε ναδειχτεί ότι:

α. Τα σημεία B, Γ και Δ είναι συνευθειακά

β. Το B είναι μεταξύ των Γ, Δ.

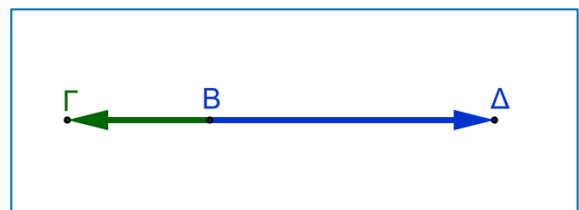
Απάντηση

$$\text{Είναι } \vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = 2\vec{\alpha} + 5\vec{\beta} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$$

$$\text{Και } \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = -\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = -2\vec{\alpha} - 6\vec{\beta}$$

Άρα $\vec{BD} = -2\vec{BG}$. Επομένως θα είναι

$\vec{BD} \updownarrow \vec{BG}$ και άρα τα B, Γ και Δ θα είναι συνευθειακά κι επιπλέον το B είναι μεταξύ των Γ και Δ.



Διανυσματική ακτίνα μέσου

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

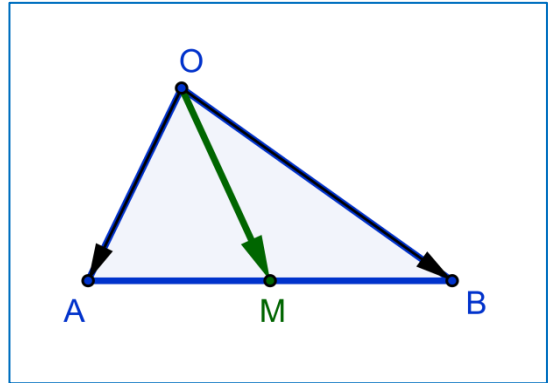
Απόδειξη:

Ας πάρουμε ένα διάνυσμα $\vec{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O . Για τη διανυσματική

ακτίνα $\vec{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε: $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$

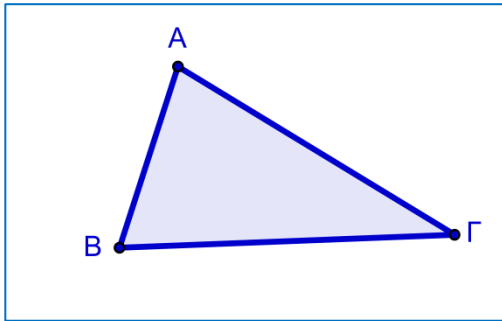
και $\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM}$

Επομένως, $2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} + \vec{OB} + \vec{BM}$. Άρα $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.37. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να προσδιορίσετε το σημείο M όταν ισχύει η σχέση $\vec{A\Gamma} - 3\vec{A\mathcal{M}} = 2\vec{M\Gamma} + 2\vec{M\mathcal{B}}$.

Λύση

Θα επιλέξουμε για σημείο αναφοράς το A .

$$\text{Είναι: } \vec{A\Gamma} - 3\vec{A\mathcal{M}} = 2\vec{M\Gamma} + 2\vec{M\mathcal{B}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{A\Gamma} - 3\vec{A\mathcal{M}} = 2(\vec{A\Gamma} - \vec{A\mathcal{M}}) + 2(\vec{A\mathcal{B}} - \vec{A\mathcal{M}}) \Leftrightarrow$$

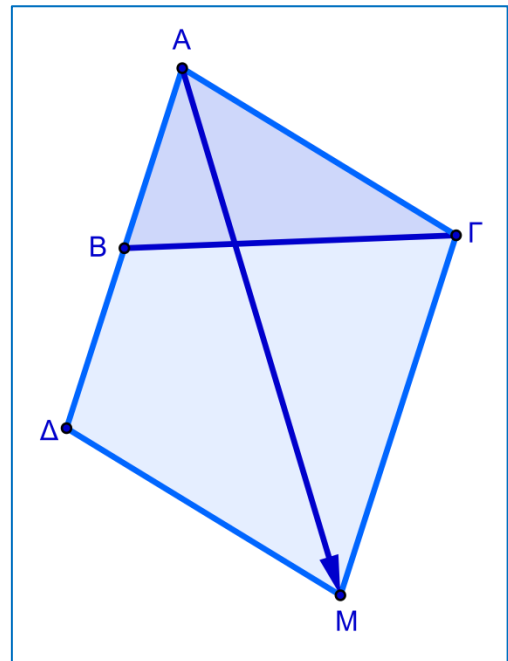
$$\Leftrightarrow \vec{A\Gamma} - 3\vec{A\mathcal{M}} = 2\vec{A\Gamma} - 2\vec{A\mathcal{M}} + 2\vec{A\mathcal{B}} - 2\vec{A\mathcal{M}} \Leftrightarrow$$

$$\vec{A\mathcal{M}} = \vec{A\Gamma} + 2\vec{A\mathcal{B}}$$

Έτσι το σημείο M είναι η κορυφή του παραλληλογράμμου που σχηματίζουμε με τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$ και $2\vec{A\mathcal{B}}$, όπως στο σχήμα.

Μέθοδος

Για να προσδιορίσουμε ένα σημείο M από γνωστή σχέση, διαλέγουμε ένα γνωστό σημείο ως σημείο αναφοράς και γράφουμε στην σχέση όλα τα διανύσματα με αρχή αυτό το σημείο.



1.38. Δίνονται τα σταθερά σημεία A, B, Γ. Να δείξετε ότι για κάθε M το διάνυσμα $2\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{GM}$ είναι σταθερό.

Λύση

Επιλέγοντας σημείο αναφοράς το A το διάνυσμα γράφεται: $2\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{GM} =$
 $= -2\vec{AM} + \vec{AB} - \vec{AM} + 3(\vec{AM} - \vec{AG}) =$
 $= -2\vec{AM} + \vec{AB} - \vec{AM} + 3\vec{AM} - 3\vec{AG} =$
 $= \vec{AB} - 3\vec{AG}$ που είναι σταθερό
 (δηλαδή ανεξάρτητο του M)

Μέθοδος

Για να δείξουμε ότι ένα διάνυσμα είναι σταθερό, προσπαθούμε γράφοντας όλα τα διανύσματα με αφαίρεση διανυσματικών ακτινών με σημείο αναφοράς της επιλογής μας, να απαλείψουμε το μεταβλητό σημείο.

1.39. Αν τα σημεία A και B είναι διαφορετικά, να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει: $x\vec{AG} - 2\vec{AL} = x\vec{BG} + 2\vec{LB}$

Λύση

Είναι: $x\vec{AG} - 2\vec{AL} = x\vec{BG} + 2\vec{LB} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x\vec{AG} - x\vec{BG} = 2\vec{LB} + 2\vec{AL} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x(\vec{AG} - \vec{BG}) = 2(\vec{LB} + \vec{AL}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x(\vec{AG} + \vec{GB}) = 2\vec{AB} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x\vec{AB} - 2\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x - 2)\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2$ αφού $\vec{AB} \neq \vec{0}$

Μέθοδος

Όταν θέλουμε να βρούμε έναν πραγματικό αριθμό από μια διανυσματική ισότητα, προσπαθούμε να φέρουμε την ισότητα στην μορφή $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ με $\vec{a} \neq \vec{0}$ και τότε θα είναι $\lambda = 0$.

1.40. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\gamma}| = 3|\vec{\alpha}|$, ναδειχτεί ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

Λύση

Είναι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ κι επομένως
 $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |-\vec{\gamma}| = |\vec{\gamma}|$
 Ακόμη
 $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + 2|\vec{\alpha}| = 3|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}|$
 Άρα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ κι επομένως τα
 διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

Μέθοδος

Για να δείξουμε ότι δύο
 διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι
 ομόρροπα αρκεί να δείξουμε ότι
 $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, ενώ για να
 δείξουμε ότι είναι αντίρροπα
 αρκεί να δείξουμε ότι
 $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$

1.41. Αν ΑΒΓ τρίγωνο και σημεία Δ, Ε τέτοια ώστε $\vec{A\Delta} = 5\vec{AB} + 8\vec{A\Gamma}$ και $\vec{A\epsilon} = 8\vec{AB} + 5\vec{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\Delta\epsilon}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι συγγραμμικά.

Λύση

Είναι $\vec{\Delta\epsilon} = \vec{A\epsilon} - \vec{A\Delta} =$
 $= 8\vec{AB} + 5\vec{A\Gamma} - 5\vec{AB} - 8\vec{A\Gamma} =$
 $= 3\vec{AB} - 3\vec{A\Gamma} = 3(\vec{AB} - \vec{A\Gamma}) =$
 $= 3\vec{GB} = -3\vec{B\Gamma}$
 Άρα $\Delta\epsilon // B\Gamma$

(Επιλέξαμε σημείο αναφοράς το Α αφού
 στις δοθείσες σχέσεις όλα τα διανύσματα έχουν αρχή το Α).

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι δύο
 διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι
 συγγραμμικά, αρκεί να δείξουμε
 ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$

1.42. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} \vec{\gamma} - \vec{\delta} + 12\vec{\alpha} = 6\vec{\beta} \\ 3\vec{\beta} - 2\vec{\gamma} = \vec{\delta} + 6\vec{\alpha} \end{cases}, \text{ να δείξετε ότι τα } \vec{\gamma}, \vec{\delta} \text{ είναι αντίρροπα.}$$

Λύση

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda < 0$,
ώστε $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\delta}$. Για να το πετύχουμε, κάνουμε
στις δοσμένες σχέσεις απαλοιφή του $\vec{\alpha}$.

$$\text{Είναι } \begin{cases} \vec{\gamma} - \vec{\delta} + 12\vec{\alpha} = 6\vec{\beta} \\ 3\vec{\beta} - 2\vec{\gamma} = \vec{\delta} + 6\vec{\alpha} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\gamma} - \vec{\delta} = 6\vec{\beta} - 12\vec{\alpha} \\ -2\vec{\gamma} - \vec{\delta} = 6\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \quad \times 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\gamma} - \vec{\delta} = 6\vec{\beta} - 12\vec{\alpha} \\ -4\vec{\gamma} - 2\vec{\delta} = 12\vec{\alpha} - 6\vec{\beta} \end{cases} \xrightarrow{(+)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\vec{\gamma} - 3\vec{\delta} = \vec{0} \Rightarrow -3\vec{\gamma} = 3\vec{\delta} \Rightarrow \vec{\gamma} = -\vec{\delta}$$

Άρα τα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ είναι αντίρροπα.

Μέθοδος

Άλλος τρόπος για να δείξουμε
Ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
είναι ομόρροπα είναι να
δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda > 0$,
ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, ενώ για να
δείξουμε ότι είναι αντίρροπα
είναι να δείξουμε ότι υπάρχει
 $\lambda < 0$, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$

1.43. Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ και O, A, B, και Γ σημεία τέτοια ώστε να ισχύει
 $\kappa\vec{OA} + \lambda\vec{OB} = (\kappa + \lambda)\vec{OG}$, να δείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

Είναι

$$\kappa\vec{OA} + \lambda\vec{OB} = (\kappa + \lambda)\vec{OG} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa\vec{OA} + \lambda\vec{OB} = \kappa\vec{OG} + \lambda\vec{OG} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa\vec{OA} - \kappa\vec{OG} = \lambda\vec{OG} - \lambda\vec{OB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa(\vec{OA} - \vec{OG}) = \lambda(\vec{OG} - \vec{OB}) \Leftrightarrow$$

Μέθοδος

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία
A, B και Γ είναι συνευθειακά,
αρκεί να δείξουμε ότι δύο από τα
διανύσματα που έχουν άκρα από
αυτά τα σημεία, είναι παράλληλα
(π.χ. $\vec{AB} // \vec{BG}$)

$$\Leftrightarrow \kappa \vec{\Gamma\Lambda} = \lambda \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{\Gamma\Lambda} = \frac{\lambda}{\kappa} \vec{B\Gamma}$$

Άρα $\vec{\Gamma\Lambda} // \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow A, B, \Gamma$ συνευθειακά.

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$

1.44. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ, E, Z έτσι ώστε $\vec{A\Delta} = \frac{1}{2} \vec{AB}$, $\vec{BE} = 3 \vec{B\Gamma}$ και $\vec{AZ} = \frac{3}{5} \vec{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Z, E είναι συνευθειακά.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{BE} &= 3 \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{AE} - \vec{AB} &= 3(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{AE} &= 3 \vec{A\Gamma} - 2 \vec{AB} \\ \text{Έτσι θα έχουμε:} \\ \vec{\Delta Z} &= \vec{AZ} - \vec{A\Delta} = \frac{3}{5} \vec{A\Gamma} - \frac{1}{2} \vec{AB} = \\ &= \frac{6 \vec{A\Gamma} - 5 \vec{AB}}{10} \\ \text{Και } \vec{ZE} &= \vec{AE} - \vec{AZ} = \\ &= 3 \vec{A\Gamma} - 2 \vec{AB} - \frac{3}{5} \vec{A\Gamma} = \\ &= \frac{15 \vec{A\Gamma} - 10 \vec{AB} - 3 \vec{A\Gamma}}{5} = \end{aligned}$$

Μέθοδος

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα που έχουν άκρα από αυτά τα σημεία, είναι παράλληλα (π.χ. $\vec{AB} // \vec{B\Gamma}$)

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$

$$= \frac{12 \vec{A\Gamma} - 10 \vec{AB}}{5} = 2 \frac{6 \vec{A\Gamma} - 5 \vec{AB}}{5} =$$

$$= 4 \frac{6 \vec{A\Gamma} - 5 \vec{AB}}{10}$$

Δηλαδή $\vec{ZE} = 4\vec{\Delta Z}$ και επομένως
 $ZE // \Delta Z$ κι έτσι τα σημεία Δ, Z, E
 είναι συνευθειακά.

Μέθοδος

Εκφράζουμε στις δεδομένες
 σχέσεις, όλα τα διανύσματα με
 αρχή σημείο της επιλογής μας
 (για παράδειγμα το A)

1.45. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ και τα σημεία O, A, B, Γ και Δ που
 ορίζονται από τις σχέσεις: $\vec{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} - 2\vec{\delta}$, $\vec{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$,
 $\vec{OG} = 3\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} - 4\vec{\delta}$ και $\vec{OD} = 4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} + 5\vec{\gamma} + 4\vec{\delta}$. Ναδειχτεί ότι τα σημεία A, B,
 Γ και Δ είναι συνευθειακά.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = \\ &= 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} + 2\vec{\delta} = \\ &= \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 2\vec{\gamma} + 2\vec{\delta} \quad (1) \\ \vec{BG} &= \vec{OG} - \vec{OB} = \\ &= 3\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} - 4\vec{\delta} - 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \\ &= -2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} - 4\vec{\gamma} - 4\vec{\delta} \quad (2) \\ \vec{GD} &= \vec{OD} - \vec{OG} = \\ &= 4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} + 5\vec{\gamma} + 4\vec{\delta} - 3\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} + 4\vec{\delta} = \\ &= 4\vec{\alpha} - 8\vec{\beta} + 8\vec{\gamma} + 8\vec{\delta} \quad (3) \end{aligned}$$

Από τις (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι $\vec{BG} = -2\vec{AB}$ (4) και $\vec{GD} = -2\vec{BG}$ (5)
 Έτσι από την (4) θα είναι τα A, B και Γ συνευθειακά και από την (5)
 θα είναι τα B, Γ και Δ συνευθειακά.

Τελικά τα A, B, Γ και Δ θα είναι συνευθειακά.

Μέθοδος

Για να δείξουμε ότι τέσσερα
 σημεία A, B, Γ και Δ είναι
 συνευθειακά, δείχνουμε ότι
 δύο τριάδες σημείων από αυτά,
 αποτελούν συνευθειακά σημεία.
 (Για παράδειγμα τα A, B και Γ
 είναι συνευθειακά, αλλά και τα
 B, Γ και Δ επίσης είναι
 συνευθειακά)

1.46. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, ναδειχτεί ότι και τα διανύσματα $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

Λύση

Έστω ότι $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) // (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$.

Τότε θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} - \vec{\beta} &= \lambda(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{\alpha} - \vec{\beta} &= \lambda\vec{\alpha} + 2\lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{\alpha} - \lambda\vec{\alpha} &= \vec{\beta} + 2\lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1 - \lambda)\vec{\alpha} &= (1 + 2\lambda)\vec{\beta}\end{aligned}$$

Αφού όμως τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, θα πρέπει

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \lambda = 0 \\ \text{και} \\ 1 + 2\lambda = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \text{και} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = -\frac{1}{2} \text{ ΑΤΟΠΟ}$$

Επομένως τα διανύσματα $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

Μέθοδος

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι κάποια πρόταση δεν ισχύει, συνήθως, θεωρούμε ότι η πρόταση ισχύει και καταλήγουμε σε **άτοπο**. Επομένως η πρότασή μας δεν ισχύει.

Μέθοδος

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$$

Μέθοδος

Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\beta}$ και τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, θα είναι $\lambda = \mu = 0$.

1.47. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ δεν είναι παράλληλα ανά δύο και ισχύουν $\vec{\gamma} \parallel (3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\gamma})$, ναδειχτεί ότι $\vec{\alpha} \parallel (2\vec{\beta} - 2\vec{\gamma})$.

Λύση

Αφού $\vec{\gamma} \parallel (3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\gamma})$

θα υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\text{να είναι: } \begin{cases} 3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = \kappa\vec{\gamma} & (1) \\ \vec{\gamma} + \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Τότε } (2) \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

$$\text{Έτσι η (1) θα γίνει } 3\lambda\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} - 3\vec{\beta} = \kappa\vec{\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3\lambda - 3)\vec{\beta} = (3 + \kappa)\vec{\gamma}.$$

Αφού όμως τα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ δεν είναι παράλληλα

πρέπει $3\lambda - 3 = 0$ και $\kappa + 3 = 0$, δηλαδή $\lambda = 1$ και $\kappa = -3$.

$$\text{Τότε οι (1) και (2) θα γίνουν: } \left. \begin{array}{l} 3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = -3\vec{\gamma} \\ \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

$$\text{Έτσι θα είναι } \vec{\alpha} \parallel (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \text{ άρα και } \vec{\alpha} \parallel (2\vec{\beta} - 2\vec{\gamma})$$

Μέθοδος

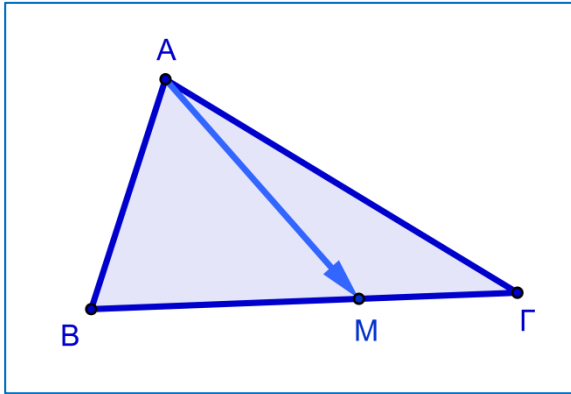
$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$$

Μέθοδος

Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\beta}$ και τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, θα είναι $\lambda = \mu = 0$.

1.48. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το σημείο M για το οποίο ισχύει $\vec{AM} = \kappa \vec{AB} + \lambda \vec{A\Gamma}$. Να δείξετε ότι αν το M βρίσκεται πάνω στην $B\Gamma$ τότε $\kappa + \lambda = 1$.

Λύση



Μέθοδος

Αν τρία σημεία B , M και Γ είναι συνευθειακά, τότε τα διανύσματα $\vec{BM}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι παράλληλα

Μέθοδος

Είναι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$

Αφού το M βρίσκεται πάνω στην $B\Gamma$, θα υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $\vec{BM} = \mu \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} - \vec{AB} = \mu(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{AB} + \mu \vec{A\Gamma} + \mu \vec{AB}$$

Τότε από τη σχέση $\vec{AM} = \kappa \vec{AB} + \lambda \vec{A\Gamma}$ προκύπτει

$$\vec{AB} + \mu \vec{A\Gamma} - \mu \vec{AB} = \kappa \vec{AB} + \lambda \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AB} - \mu \vec{AB} - \kappa \vec{AB} = \lambda \vec{A\Gamma} - \mu \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \mu - \kappa) \vec{AB} = (\lambda - \mu) \vec{A\Gamma}$$

Όμως τα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα κι έτσι θα είναι

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \mu - \kappa = 0 \quad (1) \\ \text{και} \\ \lambda - \mu = 0 \quad (2) \end{array} \right\}$$

Αφαιρώντας από την (2) την (1) προκύπτει $\kappa + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 1$

Μέθοδος

Αν $\lambda \vec{\alpha} = \mu \vec{\beta}$ και τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, θα είναι $\lambda = \mu = 0$.

1.49. Να βρεθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$ όταν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$(x - y + 1)\vec{AB} + (y - 3x)\vec{B\Gamma} + 2x\vec{A\Gamma} = \vec{0}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } (x - y + 1)\vec{AB} + (y - 3x)\vec{B\Gamma} + 2x\vec{A\Gamma} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - y + 1)\vec{AB} + (y - 3x)(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) + 2x\vec{A\Gamma} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - y + 1)\vec{AB} + y\vec{A\Gamma} - 3x\vec{A\Gamma} - y\vec{AB} + 3x\vec{AB} + 2x\vec{A\Gamma} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - y + 1)\vec{AB} - y\vec{AB} + 3x\vec{AB} = -y\vec{A\Gamma} + x\vec{A\Gamma} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - y + 1 - y + 3x)\vec{AB} = (-y + x)\vec{A\Gamma} &\Leftrightarrow \Leftrightarrow (4x - 2y + 1)\vec{AB} = (-y + x)\vec{A\Gamma} \end{aligned}$$

Όμως τα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα,
Οπότε:

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 2y + 1 = 0 \quad (1) \\ \text{και} \\ y - x = 0 \quad (2) \end{array} \right\}$$

Από την (2) είναι $y = x$ οπότε η (1) γίνεται

$$4x - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Τότε και } y = -\frac{1}{2}$$

Μέθοδος

Σε ένα τρίγωνο, πάντα το διάνυσμα μιας πλευράς (για παράδειγμα της $B\Gamma$) μπορούμε να το εκφράσουμε σε σχέση με τα διανύσματα των δύο άλλων ($\vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB}$). Τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα οπότε μια σχέση της μορφής $\kappa \vec{AB} = \lambda \vec{A\Gamma}$ θα μας δώσει $\lambda = \mu = 0$.

1.50. Αν ισχύει η σχέση $\vec{B\Gamma} = \vec{B\Lambda} + \vec{A\Lambda} - \vec{\Gamma B}$, να αποδείξετε ότι το Λ είναι μέσο του AB .

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{B\Gamma} &= \vec{B\Lambda} + \vec{A\Lambda} - \vec{\Gamma B} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{O\Gamma} - \vec{O B} &= \\ = \vec{O\Lambda} - \vec{O B} + \vec{O\Lambda} - \vec{O A} - \vec{O B} + \vec{O\Gamma} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\vec{O\Lambda} &= \vec{O A} + \vec{O B} \Leftrightarrow \vec{O\Lambda} = \frac{\vec{O A} + \vec{O B}}{2} \end{aligned}$$

Άρα το Λ είναι μέσο του AB .

Μέθοδος

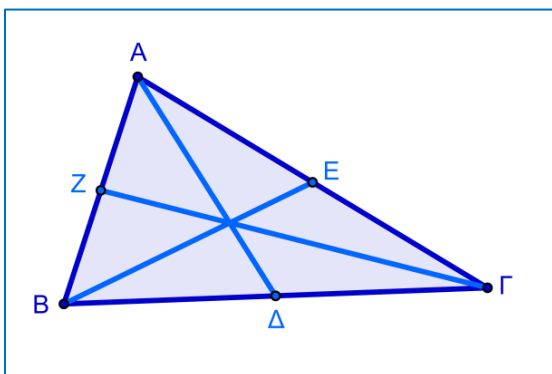
Ένας άλλος τρόπος για να δείξουμε ότι το Λ είναι μέσο του AB (εκτός δηλαδή της σχέσης $\vec{A\Lambda} = \vec{\Lambda B}$) είναι δουλεύοντας με διανυσματικές ακτίνες να δείξουμε ότι $\vec{O\Lambda} = \frac{\vec{O A} + \vec{O B}}{2}$.

1.51. Αν AD , BE και ΓZ είναι διάμεσοι τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\vec{A\Delta} + \vec{B E} + \vec{\Gamma Z} = \vec{0}$.

(Σχολικό βιβλίο – Α7)

Λύση

α' τρόπος



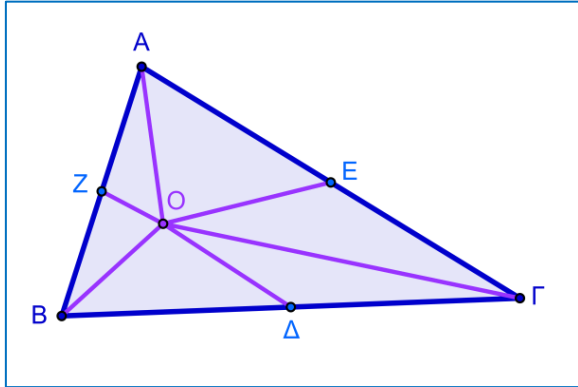
$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{A\Delta} + \vec{B E} + \vec{\Gamma Z} &= \\ = \frac{\vec{A B} + \vec{A \Gamma}}{2} + \frac{\vec{B A} + \vec{B \Gamma}}{2} + \frac{\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}}{2} &= \end{aligned}$$

Μέθοδος

Επιλέγουμε κάθε φορά κατάλληλη αρχή και χρησιμοποιούμε την σχέση της διανυσματικής ακτίνας του μέσου. Για παράδειγμα: Δ μέσο του $B\Gamma \Leftrightarrow \vec{A\Delta} = \frac{\vec{A B} + \vec{A \Gamma}}{2}$.

$$= \frac{\vec{AB} + \vec{AG} + \vec{BA} + \vec{BG} + \vec{GA} + \vec{GB}}{2} = \frac{\vec{AB} + \vec{AG} - \vec{AB} + \vec{BG} - \vec{AG} - \vec{BG}}{2} = \vec{0}$$

β' τρόπος (με αρχή O)



$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \vec{A\Delta} + \vec{B\epsilon} + \vec{\Gamma\zeta} &= \\ &= \vec{O\Delta} - \vec{O\Lambda} + \vec{O\epsilon} - \vec{O\beta} + \vec{O\zeta} - \vec{O\gamma} = \\ &= \frac{\vec{O\beta} + \vec{O\gamma}}{2} - \vec{O\Lambda} + \frac{\vec{O\Lambda} + \vec{O\gamma}}{2} - \vec{O\beta} + \frac{\vec{O\Lambda} + \vec{O\beta}}{2} - \vec{O\gamma} = \\ &= \frac{\vec{O\beta} + \vec{O\gamma} - 2\vec{O\Lambda} + \vec{O\Lambda} + \vec{O\gamma} - 2\vec{O\beta} + \vec{O\Lambda} + \vec{O\beta} - 2\vec{O\gamma}}{2} = \vec{0} \end{aligned}$$

Μέθοδος

Επιλέγουμε σημείο αναφοράς ένα άλλο σημείο O και για όλα τα μέσα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις των διανυσματικών ακτινών με αρχή το σημείο O.

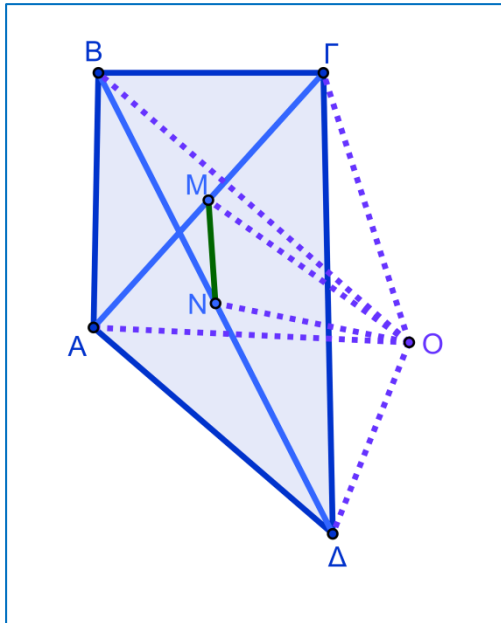
Για παράδειγμα: Δ μέσο του ΒΓ

$$\Leftrightarrow \vec{O\Delta} = \frac{\vec{O\beta} + \vec{O\gamma}}{2}.$$

1.52. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Μ και Ν των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Αν $4\vec{MN} = \vec{AD} - \vec{BG}$ να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Σχολικό βιβλίο – Β6)

Λύση



α' τρόπος

$$\begin{aligned}
 &\text{Είναι } 4\vec{MN} = \vec{AD} - \vec{BG} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 4(\vec{ON} - \vec{OM}) = \\
 &= (\vec{OD} - \vec{OA}) - (\vec{OG} - \vec{OB}) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 4\frac{\vec{OB} + \vec{OD}}{2} - 4\frac{\vec{OA} + \vec{OG}}{2} = \\
 &= \vec{OD} - \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OG} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2\vec{OB} + 2\vec{OD} - 2\vec{OA} - 2\vec{OG} = \\
 &= \vec{OD} - \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OG} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \vec{OB} + \vec{OD} - \vec{OA} - \vec{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} = -\vec{GD} = \vec{DG}
 \end{aligned}$$

Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μέθοδος

Για να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{AB} = \vec{DC}$ ή $\vec{AD} = \vec{BC}$ και ότι τρία σημεία από τα Α, Β, Γ και Δ, δεν είναι συνευθειακά.

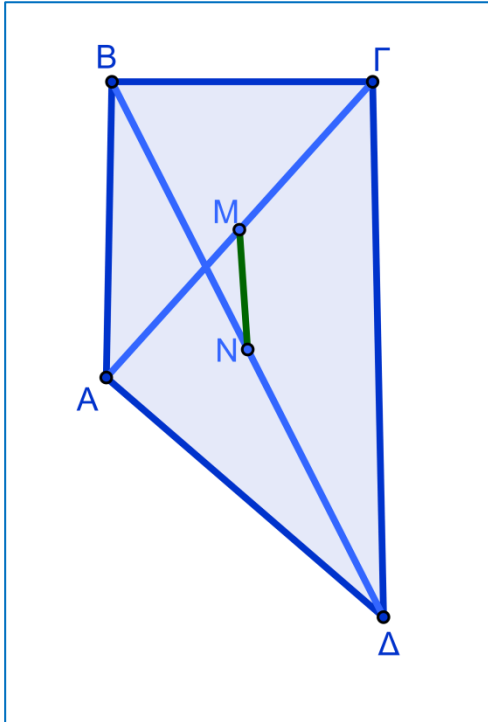
Μέθοδος

Επιλέγουμε σημείο αναφοράς ένα σημείο Ο και για όλα τα μέσα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις των διανυσματικών ακτινών με αρχή το σημείο Ο.

Για παράδειγμα: Μ μέσο του ΑΓ

$$\Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OG}}{2}.$$

β' τρόπος

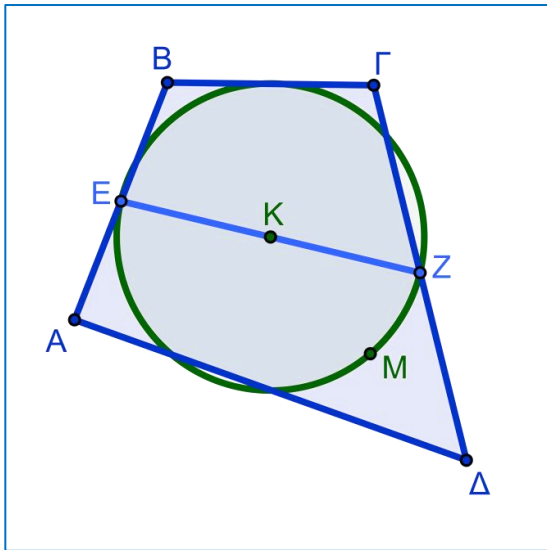
Μέθοδος

Επιλέγουμε κάθε φορά κατάλληλη αρχή και χρησιμοποιούμε την σχέση της διανυσματικής ακτίνας του μέσου. Για παράδειγμα: N μέσο του BΔ $\Leftrightarrow \vec{MN} = \frac{\vec{MB} + \vec{MD}}{2}$.

$$\begin{aligned}
 &\text{Είναι } 4\vec{MN} = \vec{AB} - \vec{CD} \Leftrightarrow 4\frac{\vec{MB} + \vec{MD}}{2} = \vec{AB} - \vec{CD} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2\vec{MB} + 2\vec{MD} = \vec{AB} - \vec{CD} \Leftrightarrow -2\vec{BM} - 2\vec{DM} = \vec{AB} - \vec{CD} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -2\frac{\vec{BA} + \vec{BM}}{2} - 2\frac{\vec{DM} + \vec{MC}}{2} = \vec{AB} - \vec{CD} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{BM} + \vec{AB} - \vec{MC} = \vec{AB} - \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD} \\
 &\text{Άρα το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.}
 \end{aligned}$$

1.53. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ και Δ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο K τέτοιο ώστε $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KG} + \vec{KD} = \vec{0}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία είναι $\left| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} + \vec{MD} \right| = 4 \left| \vec{KE} \right|$ όπου E το μέσο του AB.

Λύση



Είναι E μέσο του AB και έστω Z το μέσο του ΓΔ.

$$\text{Θα είναι } \vec{KE} = \frac{\vec{KA} + \vec{KB}}{2} \text{ και } \vec{KZ} = \frac{\vec{KG} + \vec{KD}}{2}$$

$$\text{Έτσι θα έχουμε: } \vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KG} + \vec{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{KE} + 2\vec{KZ} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\text{Αν τώρα N είναι το μέσο του EZ, θα είναι } \vec{KN} = \frac{\vec{KE} + \vec{KZ}}{2}$$

$$\text{κι έτσι η (1) γίνεται } 4\vec{KN} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{KN} = \vec{0}$$

Επομένως το K ταυτίζεται με το N. Δηλαδή το K είναι το μέσο του τμήματος EZ και είναι μοναδικό. Για οποιοδήποτε άλλο σημείο M του χώρου θα είναι:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} + \vec{MD} = \vec{MK} + \vec{KA} + \vec{MK} + \vec{KB} + \vec{MK} + \vec{KG} + \vec{MK} + \vec{KD} =$$

Μέθοδος

Επιλέγουμε κατάλληλα μέσα ώστε από την σχέση της διανυσματικής ακτίνας του μέσου να καταφέρουμε στην δοσμένη σχέση να έχουμε λιγότερα διανύσματα.

Για παράδειγμα: E μέσο του AB

$$\Leftrightarrow \vec{KE} = \frac{\vec{KA} + \vec{KB}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{KE} = \vec{KA} + \vec{KB}$$

$$= 4\vec{MK} + (\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KG} + \vec{KL}) =$$

$$= 4\vec{MK} + \vec{0} = 4\vec{MK}$$

Επομένως από την σχέση

$$|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} + \vec{ML}| = 4|\vec{KE}|$$

$$\text{θα πάρουμε } |4\vec{MK}| = 4|\vec{KE}| \Leftrightarrow |\vec{MK}| = |\vec{KE}|$$

Έτσι ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι ο
κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα $\rho = |\vec{KE}|$

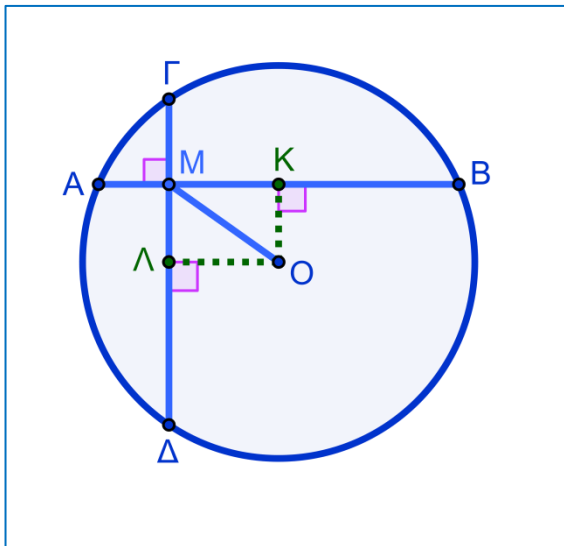
Μέθοδος

Αν Κ σταθερό σημείο και ισχύει

$|\vec{KM}| = \rho > 0$, ο γεωμετρικός
τόπος του σημείου Μ είναι ο
κύκλος με κέντρο Κ και
ακτίνα ρ .

1.54. Δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου με κέντρο Ο τέμνονται στο σημείο Μ. Να δείξετε ότι: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG} + \vec{OD} = 2\vec{OM}$.

Λύση



Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΑΒ και
ΓΔ αντίστοιχα, τότε ισχύουν

$$\vec{OK} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \text{ και } \vec{OL} = \frac{\vec{OG} + \vec{OD}}{2}.$$

Επομένως θα είναι:

Μέθοδος

Επιλέγουμε κατάλληλα μέσα
και χρησιμοποιούμε τη σχέση
της διανυσματικής ακτίνας του
μέσου με αρχή το Ο. Για
παράδειγμα: Κ μέσο του ΑΒ $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \vec{OK} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$

Μέθοδος

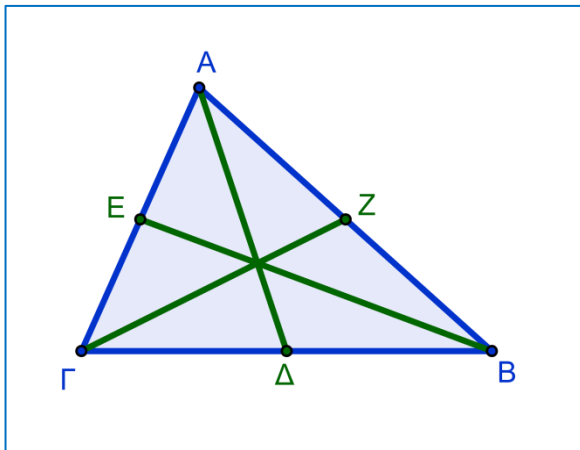
Το τμήμα που ενώνει το κέντρο
ενός κύκλου με το μέσο μιας
χορδής, είναι κάθετο στην χορδή
και ονομάζεται **απόστημα** της
χορδής.

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG} + \vec{OL} = 2\vec{OK} + 2\vec{OL} = 2(\vec{OK} + \vec{OL}) = 2\vec{OM}$$

επειδή το ΟΚΜΛ είναι ορθογώνιο αφού $OK \perp AB$ και $OL \perp ΓΔ$

1.55. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ οι διάμεσοί του ώστε να ισχύει η σχέση: $\kappa \vec{A\Delta} + \lambda \vec{B\epsilon} + \mu \vec{\Gamma Z} = \vec{0}$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να δειχτεί ότι $\kappa = \lambda = \mu$.

Λύση



Μέθοδος

Χρησιμοποιούμε κατάλληλα τη σχέση της διανυσματικής ακτίνας του μέσου. Για παράδειγμα: Δ μέσο του ΒΓ $\Leftrightarrow \vec{A\Delta} = \frac{\vec{AB} + \vec{A\Gamma}}{2}$

$$\text{Είναι } \kappa \vec{A\Delta} + \lambda \vec{B\epsilon} + \mu \vec{\Gamma Z} = \vec{0} \Leftrightarrow \kappa \frac{\vec{AB} + \vec{A\Gamma}}{2} + \lambda \frac{\vec{BA} + \vec{B\Gamma}}{2} + \mu \frac{\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}}{2} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa \vec{AB} + \kappa \vec{A\Gamma} + \lambda \vec{BA} + \lambda \vec{B\Gamma} + \mu \vec{\Gamma A} + \mu \vec{\Gamma B} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa \vec{AB} + \kappa \vec{A\Gamma} - \lambda \vec{AB} + \lambda(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) - \mu \vec{A\Gamma} + \mu(\vec{AB} - \vec{A\Gamma}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa \vec{AB} + \kappa \vec{A\Gamma} - \lambda \vec{AB} + \lambda \vec{A\Gamma} - \lambda \vec{AB} - \mu \vec{A\Gamma} + \mu \vec{AB} - \mu \vec{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + \mu - 2\lambda) \vec{AB} + (\kappa + \lambda - 2\mu) \vec{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + \mu - 2\lambda) \vec{AB} = (2\mu - \kappa - \lambda) \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$$

(αφού τα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + \mu - 2\lambda = 0 & (1) \\ 2\mu - \kappa - \lambda = 0 & (2) \end{cases} \text{ και }$$

Μέθοδος

Αν $\lambda \vec{\alpha} = \mu \vec{\beta}$ και τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, θα είναι $\lambda = \mu = 0$.

Προσθέτοντας τις (1) και (2) προκύπτει $3\mu - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$

Τότε από την (1) είναι $\kappa + \lambda - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \kappa = \lambda$. Άρα $\kappa = \lambda = \mu$.

1.56. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M για το οποίο ισχύει

$\vec{MB} = \kappa \vec{A\Gamma} + (1 - \kappa) \vec{AB}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για $\lambda \in \mathbb{R}$

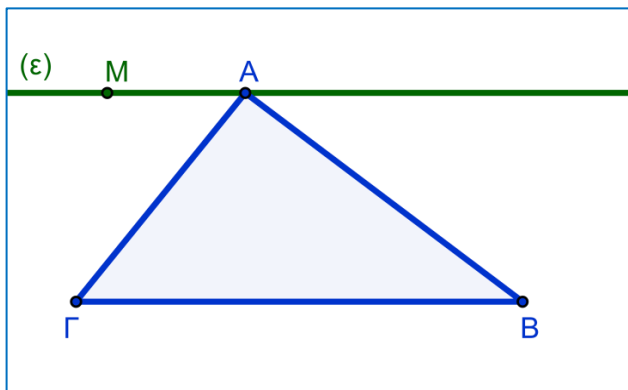
Λύση

$$\text{Είναι } \vec{MB} = \kappa \vec{A\Gamma} + (1 - \kappa) \vec{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{MB} = \kappa \vec{A\Gamma} + \vec{AB} - \kappa \vec{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{AB} = \kappa(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) \Leftrightarrow \vec{MA} = \kappa \vec{B\Gamma}$$

Επομένως $\vec{AM} // \vec{B\Gamma}$ και αφού το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι η ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στη $B\Gamma$.

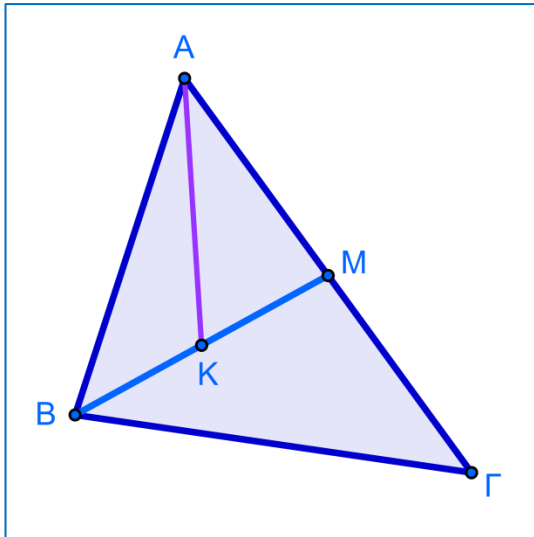


Μέθοδος

Αν A είναι ένα γνωστό σημείο και $\vec{v}$ ένα γνωστό διάνυσμα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει η σχέση $\vec{MA} = \lambda \vec{v}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v}$.

1.57. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσος BM και το μέσο K της BM . Να γράψετε το $\vec{AK}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$

Λύση



$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{AK} &= \frac{\vec{AM} + \vec{AB}}{2} = \frac{1}{2}\vec{AM} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\vec{A\Gamma} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{A\Gamma} \end{aligned}$$

Μέθοδος

Ένα διάνυσμα $\vec{v}$ είναι γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ όταν υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$.

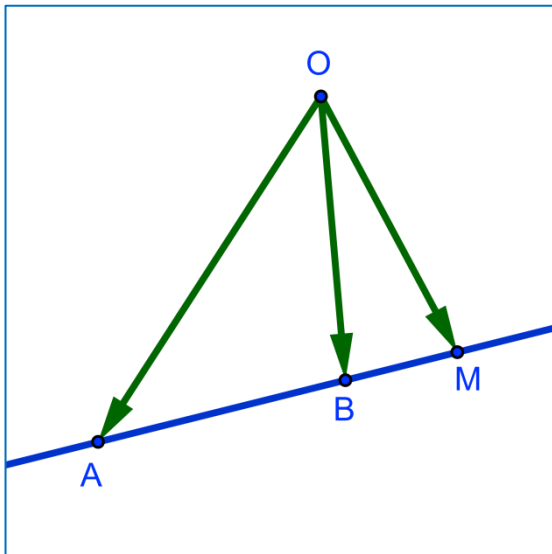
Μέθοδος

Χρησιμοποιούμε κατάλληλα τη σχέση της διανυσματικής ακτίνας του μέσου. Για παράδειγμα: K μέσο του $BM \Leftrightarrow \vec{AK} = \frac{\vec{AB} + \vec{AM}}{2}$

1.58. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{r}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων A, B και M αντιστοίχως και $\frac{MA}{MB} = \frac{\kappa}{\lambda}$, να αποδείξετε ότι αν το M είναι εξωτερικό του AB, τότε $\vec{r} = \frac{\lambda \vec{\alpha} - \kappa \vec{\beta}}{\lambda - \kappa}$.

(Σχολικό βιβλίο – Β4)

Λύση



Αφού τα $\vec{MA}$ και $\vec{MB}$ είναι ομόρροπα, θα

$$\text{είναι: } \vec{MA} = \frac{\kappa}{\lambda} \vec{MB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} - \vec{OM} = \frac{\kappa}{\lambda} (\vec{OB} - \vec{OM}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha} - \vec{r} = \frac{\kappa}{\lambda} (\vec{\beta} - \vec{r}) \Leftrightarrow \lambda \vec{\alpha} - \lambda \vec{r} = \kappa \vec{\beta} - \kappa \vec{r} \Leftrightarrow \lambda \vec{\alpha} - \kappa \vec{\beta} = \lambda \vec{r} - \kappa \vec{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \kappa) \vec{r} = \lambda \vec{\alpha} - \kappa \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{r} = \frac{\lambda \vec{\alpha} - \kappa \vec{\beta}}{\lambda - \kappa}$$

Μέθοδος

Για να μεταβούμε από μία ισότητα μέτρων σε ισότητα διανυσμάτων, πρέπει να γνωρίζουμε αν τα διανύσματα είναι ομόρροπα ή αντίρροπα.

Έτσι αν $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$ και

$$\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$$

και αν $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$ και

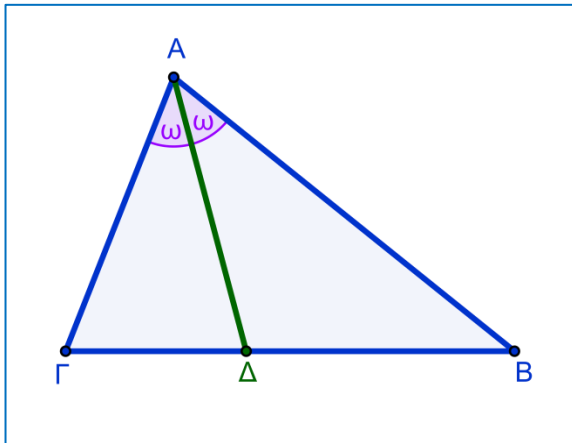
$$\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\lambda \vec{\beta}$$

Διαφορετικά δεν μπορούμε να μεταβούμε σε ισότητα διανυσμάτων.

1.59. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε την εσωτερική διχοτόμο ΑΔ. Αν $|\vec{A\Gamma}| = \beta$ και

$|\vec{A\Delta}| = \gamma$ να δειχτεί ότι: $\vec{A\Delta} = \frac{\beta \vec{A\Delta} + \gamma \vec{A\Gamma}}{\beta + \gamma}$.

Λύση



Μέθοδος

Αν η ΑΔ είναι εσωτερική διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ, από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου

είναι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$

Είναι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \Rightarrow \frac{\gamma}{\beta} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \Rightarrow B\Delta = \frac{\gamma}{\beta} \Delta\Gamma$

Όμως τα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\Delta\Gamma}$ είναι ομόρροπα κι επομένως θα είναι και

$$\vec{B\Delta} = \frac{\gamma}{\beta} \vec{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \beta \vec{B\Delta} = \gamma \vec{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta(\vec{A\Delta} - \vec{A\Delta}) = \gamma(\vec{A\Gamma} - \vec{A\Delta}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta \vec{A\Delta} - \beta \vec{A\Delta} = \gamma \vec{A\Gamma} - \gamma \vec{A\Delta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta \vec{A\Delta} + \gamma \vec{A\Delta} = \beta \vec{A\Delta} + \gamma \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\beta + \gamma) \vec{A\Delta} = \beta \vec{A\Delta} + \gamma \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{A\Delta} = \frac{\beta \vec{A\Delta} + \gamma \vec{A\Gamma}}{\beta + \gamma}.$$

Μέθοδος

Όταν είναι $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$ και

$\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$

και όταν είναι $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$ και

$\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = -\lambda \vec{\beta}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.60. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α.** Τι ονομάζουμε γινόμενο του πραγματικού αριθμού λ με το διάνυσμα $\vec{a}$;
- β.** Πότε λέμε ότι ένα διάνυσμα $\vec{a}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$;
- γ.** Ποια σχέση ισχύει για τη διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος;

1.61. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

- α.** $2\vec{AB} + \vec{BD} = \dots\dots\dots$ **β.** $\frac{1}{2}\vec{AG} + \frac{1}{2}\vec{GB} = \dots\dots\dots$
- γ.** $\vec{AG} + \vec{AO} - \vec{GO} = \dots\dots\dots$ **δ.** $2\vec{AG} - \vec{BG} - 2\vec{AB} = \dots\dots\dots$
- ε.** $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{BG} - \vec{DG} = \dots\dots\dots$

1.62. Να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις:

- α.** Αν $|\vec{a}| = \lambda |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{a} // \vec{\beta}$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- β.** Αν $\vec{a}$ μη μηδενικό διάνυσμα, τότε το $-|\vec{a}| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ έχει αντίθετη φορά από το $-\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- γ.** Αν $\lambda \geq 0$ και $\vec{\beta} = \lambda \vec{a}$, τότε $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{a}$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- δ.** Αν $\vec{a} + 2\vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- ε.** Αν $\vec{a} = -3\vec{\beta}$, τότε $|\vec{a}| = -3|\vec{\beta}|$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- στ.** Αν το $\vec{a}$ είναι μοναδιαίο και $|3\vec{a} + \vec{\beta}| = 0$, τότε $|\vec{\beta}| = 3$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- ζ.** Αν $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε οπωσδήποτε $\vec{a} = \vec{0}$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- η.** Αν $\kappa \vec{a} = \kappa \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}^*$. (Σ) ☐ (Λ) ☐

- θ.** Το διάνυσμα $\lambda \vec{\alpha}$ με $\lambda < 0$ είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- ι.** Αν $\vec{AB} = 2\vec{BG}$, τότε τα Α,Γ βρίσκονται εκατέρωθεν του Β. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- ια.** Αν $k\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ με $k, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμικά διανύσματα, τότε $k = \lambda = 0$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- ιβ.** Αν η ΑΜ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ, τότε $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AG}$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- ιγ.** Το $-\frac{1}{2}\vec{\beta}$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Σ) ☐ (Λ) ☐
- ιδ.** Αν $(AB) = 3(BG)$, τότε $\vec{AB} = 3 \cdot \vec{BG}$ (Σ) ☐ (Λ) ☐

1.63. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $\vec{AG} = \lambda \vec{AB}$ και $\vec{BG} = (2\lambda - 1)\vec{AB}$, τότε ο $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι:

☐ **A** 1 ☐ **B** 2 ☐ **Γ** 3 ☐ **Δ** -1 ☐ **E** κανένα από αυτά

β. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ μη μηδενικά διανύσματα τέτοια ώστε $\vec{\beta} = 5\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma} = -2\vec{\beta}$. Τότε η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ είναι:

☐ **A** 0 ☐ **B** $\frac{\pi}{2}$ ☐ **Γ** $\frac{\pi}{3}$ ☐ **Δ** π

γ. Αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι αντίρροπα διανύσματα και $\vec{PK} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{PL} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{PM} = 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta}$ τότε ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ που ορίζεται από την ισότητα $\vec{KL} = \lambda \vec{LM}$ είναι ίσος με:

☐ **A** $\frac{1}{2}$ ☐ **B** $\frac{1}{3}$ ☐ **Γ** $\frac{1}{4}$ ☐ **Δ** -1 ☐ **E** κανένα από αυτά

1.64. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\vec{A\Delta} = \vec{\alpha}$, $\vec{\Delta\Gamma} = \vec{\beta}$ και M είναι το μέσο της $B\Gamma$. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με το ίσο του της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\vec{\Delta M}$	α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
2. $\vec{A\Gamma}$	β) $\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
3. $\vec{AM}$	γ) $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
4. $\vec{B\Delta}$	δ) $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
	ε) $\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\alpha}$
	στ) $\vec{\beta} + \frac{1}{2}\vec{\alpha}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1.65. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ, Δ ισχύει

$$\text{ότι: } 4\vec{AB} + 3\vec{AG} = 4\vec{DB} + 3\vec{DG} - 7\vec{DA}$$

1.66. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να αποδείξετε ότι:

α. $3\vec{AB} - 2\vec{AG} = 3\vec{DB} - 2\vec{DG} - \vec{DA}$

β. $5\vec{AB} + 3\vec{BG} + 2\vec{BD} = 7\vec{AG} + 4\vec{GD} - 2\vec{AD}$

1.67. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και ένα σημείο M τέτοιο ώστε να είναι:

$$3\vec{BM} + 4\vec{GM} = \vec{0}. \text{ Να αποδείξετε ότι: } 3\vec{AB} = 7\vec{AM} - 4\vec{AG}$$

1.68. Αν ισχύει $5\vec{AG} - 2\vec{AB} = 5\vec{BG} - 2\vec{DA}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται.

1.69. Δίνονται τα σημεία A, B και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M το διάνυσμα $3\vec{MA} - 5\vec{MB} + 2\vec{MG}$ είναι σταθερό.

(Σχολικό βιβλίο – B8)

1.70. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

α. $\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\alpha}) = \frac{1}{3}(\vec{x} - \vec{\beta})$

β. $\vec{x} - 3(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 4(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) - 3\vec{x}$

1.71. Δίνονται τα σημεία του χώρου A, B, Γ, Δ με $\vec{BG} \neq \vec{0}$ έτσι ώστε $\vec{AD} = \lambda \vec{BG}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{AB} + \vec{GD} = \mu \vec{BG}$.

1.72. Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{AB}$ και σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύει $\vec{AG} = \lambda \vec{AB}$ και $\vec{BG} = \mu \vec{AB}$. Να αποδείξετε ότι $\lambda - \mu = 1$.

(Σχολικό βιβλίο – Α10)

1.73. Έστω τα σημεία A, B, Γ, M και N ενός επιπέδου, όπου τα M και N είναι διαφορετικά. Να βρεθεί ο $x \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$x^2 \vec{MA} + x \vec{MB} - 2 \vec{M\Gamma} = x^2 \vec{NA} + x \vec{NB} - 2 \vec{N\Gamma}$$

1.74. Να αποδείξετε ότι αν ισχύουν δύο από τις σχέσεις $x + y + z = 0$, $x \vec{KA} + y \vec{KB} + z \vec{K\Gamma} = \vec{0}$ και $x \vec{LA} + y \vec{LB} + z \vec{L\Gamma} = \vec{0}$, τότε θα ισχύει και η τρίτη. (Το K είναι διαφορετικό από το L).

(Σχολικό βιβλίο – Β3)

1.75. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{4}$. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμικά.

1.76. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει: $\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} = |\vec{\beta}| \cdot \vec{\alpha}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

1.77. Αν $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και O τυχαίο σημείο, να αποδείξετε ότι υπάρχει θετικός αριθμός λ , ώστε να ισχύει: $\vec{OD} + \lambda \vec{OB} = \vec{OG} + \lambda \vec{OA}$.

1.78. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\vec{AD} = \kappa \vec{AB} + \lambda \vec{A\Gamma}$ και $\vec{AE} = \lambda \vec{AB} + \kappa \vec{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{DE} \parallel \vec{B\Gamma}$.

(Σχολικό βιβλίο – Α11)

1.79. Αν Δ είναι τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, να δείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\vec{A\Delta} = \kappa \vec{AB} + (1 - \kappa) \vec{A\Gamma}$

1.80. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = 4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:

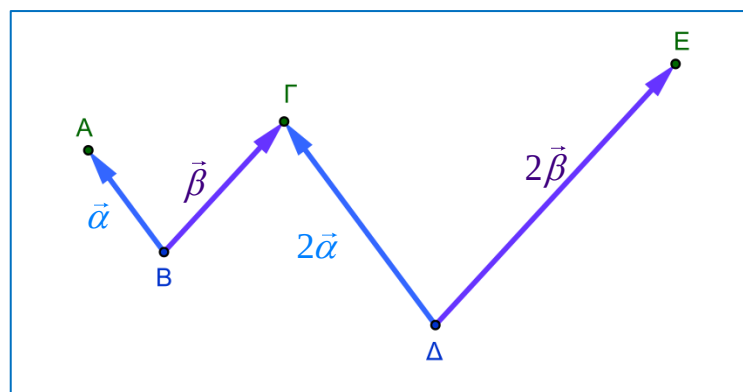
α. Το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{u} + 3\vec{v}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$.

β. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = \vec{u} - 2\vec{v}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\beta}$.

1.81. Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:
 $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

1.82. Εάν ισχύει $2\vec{A\Lambda} + 3\vec{B\Lambda} + 2\vec{M\Lambda} = \vec{A\Kappa} + \vec{A\M} + \vec{B\Kappa}$, να αποδειχθεί ότι:
 $\vec{K\Lambda} \uparrow \downarrow \vec{M\Lambda}$

1.83. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι τα σημεία A, Γ και E είναι συνευθειακά.



(Σχολικό βιβλίο – Α5)

1.84. Θεωρούμε τα σημεία O, A, B, Γ για τα οποία ισχύει ότι: $\vec{OA} = 4\vec{\alpha}$, $\vec{OB} = 2\vec{\beta}$ και $\vec{O\Gamma} = -2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

1.85. Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ, E ισχύει η σχέση

$$2\vec{A\Delta} - 2\vec{BE} + \vec{\Gamma B} = \vec{A\Gamma} + \vec{AE} - 3\vec{B\Delta} \text{ να δείξετε ότι τα } \Gamma, \Delta, E \text{ είναι συνευθειακά.}$$

1.86. Αν $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{BL} + 3\vec{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.

(Σχολικό βιβλίο – Α6)

1.87. Εάν ισχύει $(\kappa + 2)\vec{PA} + 3\vec{PB} = (\kappa + 5)\vec{PG}$, να δειχθεί ότι τα A, B και Γ είναι συνευθειακά.

1.88. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και M το μέσο του AB. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{BG} = \vec{\beta}$ και σημεία Δ και E ώστε $\vec{\Delta M} = \frac{\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}}{2}$ και $\vec{EM} = \frac{5}{6}\vec{\alpha} - \frac{5}{3}\vec{\beta}$, να δείξετε ότι:

α. Το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

β. Τα σημεία Δ, E, M είναι συνευθειακά

1.89. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ και τα σημεία E, Z των AΔ και AΓ αντίστοιχα με $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{A\Delta}$ και $\vec{AZ} = \frac{1}{4}\vec{A\Gamma}$. Να δειχτεί ότι τα σημεία B, E και Z είναι συνευθειακά και μάλιστα $\vec{EZ} = \frac{1}{3}\vec{ZB}$.

1.90. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημείο E της AΓ τέτοιο ώστε $\vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{EG}$. Αν Δ είναι σημείο της διαμέσου AM τέτοιο ώστε $\vec{A\Delta} = 3\vec{\Delta M}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Δ, E είναι συνευθειακά.

1.91. Αν για τα σημεία O, A, B, Γ είναι $3\vec{OA} + 4\vec{OB} = 7\vec{OG}$, να δείξετε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά και το Γ βρίσκεται μεταξύ των A και B.

1.92. Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa + \lambda = \frac{2}{9}$ και ισχύουν οι σχέσεις: $\vec{OA} = 3\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OG}$ και $\vec{OB} = \kappa\vec{OA} + \lambda\vec{OG}$, να αποδειχτεί ότι τα σημεία A, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

1.93. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ, Ε για τα οποία ισχύουν: $\vec{AD} = \kappa \cdot \vec{BG}$ και $\vec{BE} = \lambda \cdot \vec{AG}$ όπου κ, λ πραγματικοί αριθμοί με $\kappa \cdot \lambda = 1$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.

1.94. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά, να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = (x-1)\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = (3x+2)\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.
(Σχολικό βιβλίο – Β1)

1.95. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, να βρεθεί αριθμός $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\mu\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

1.96. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τα οποία δεν είναι παράλληλα ανά δύο. Αν είναι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma} + \vec{\alpha}$ να δειχτεί ότι $\vec{\gamma} \parallel \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

1.97. Έστω τρίγωνο ABΓ και ΑΔ διάμεσός του. Να λυθεί ως προς $x, y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση: $x \cdot \vec{AB} + y \cdot \vec{AG} = \vec{AD} + \vec{BG}$

1.98. Σε κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ ισχύει η σχέση: $\vec{AD} = 4\vec{BG} - 3\vec{AG}$.

α. Να δειχτεί ότι το ABΓΔ είναι τραπέζιο.

β. Να βρεθούν οι πραγματικοί x, y για τους οποίους ισχύει:

$$\vec{AB} + \vec{AD} = x\vec{AG} + y\vec{BD}.$$

1.99. Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΜ και ΒΝ να αποδείξετε ότι:

$$\vec{AP} = \frac{4}{5} \vec{AM} \text{ και } \vec{BP} = \frac{2}{5} \vec{BN}$$

1.100. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \vec{MN} = \frac{\vec{AD} + \vec{GB}}{2}$$

$$\beta. \vec{BM} + \vec{GN} = \frac{\vec{BA} + \vec{GD}}{2}$$

1.101. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Κ το κέντρο του και Μ το μέσο του ΚΓ. Να αποδειχθεί ότι: $\vec{AB} + 2\vec{AG} + \vec{AD} = 4\vec{AM}$

1.102. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντιστοίχως τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Ο ισχύει:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG} = \vec{OK} + \vec{OL} + \vec{OM}$$

(Σχολικό βιβλίο – Α8)

1.103. Αν τα τμήματα ΑΒ, ΓΔ και ΕΖ έχουν κοινό μέσο Μ και Ο ένα τυχαίο σημείο, να δείξετε ότι $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OZ} = 6\vec{OM}$

1.104. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι $\vec{AK} + \vec{AL} = \frac{3}{2} \vec{AG}$.

1.105. Αν Μ είναι το μέσο της διαγωνίου ΑΓ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι $\vec{MB} + \vec{MD} = \vec{AB} - \vec{AD}$.

1.106. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντιστοίχως ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι: $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{GB} + \vec{GD} = 4\vec{MN}$.

(Σχολικό βιβλίο – Α9)

1.107. Έστω Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αντίστοιχα και Π μέσο του ΚΛ. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \vec{AB} + \vec{AG} + \vec{AD} = 4\vec{AP} \qquad \beta. \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PG} + \vec{PD} = \vec{0}$$

1.108. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και δύο σημεία Ρ, Μ για τα οποία είναι $\vec{AB} + \vec{AG} = \vec{AP} + \vec{AM}$.

- α. Να δείξετε ότι τα τμήματα ΒΓ και ΡΜ έχουν κοινό μέσο.
- β. Για κάθε σημείο Ο του χώρου, να δείξετε ότι: $\vec{OB} + \vec{OG} = \vec{OP} + \vec{OM}$.
- γ. Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΒΡΓΜ;

1.109. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο σ' αυτό κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R. Έστω ακόμη ένα σημείο Η στο επίπεδο του τριγώνου, που ορίζεται από την ισότητα $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG}$.

- α. Να δειχτεί ότι το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.
- β. Να δειχτεί ότι $0 \leq |\vec{OH}| \leq 3R$.

1.110. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει: $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MG} - \vec{MD}|$.

1.111. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{MA} + \vec{MG} + 2\vec{MD}| = |\vec{MA} + \vec{MG} - 2\vec{MD}|.$$

1.112. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει: $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MG} + \vec{MD}|$.

1.113. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει: $\lambda \vec{M\Gamma} - \vec{AB} = (\lambda - 1)\vec{MB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.114. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, σημείο E της πλευράς AB , σημείο Z της πλευράς $\Gamma\Delta$, και σημείο P της πλευράς EZ τέτοια ώστε $\vec{AE} = 4\vec{EB}$, $\vec{\Delta Z} = \frac{1}{3}\vec{Z\Gamma}$ και $\vec{EP} = 2\vec{PZ}$. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{AP}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AD}$.

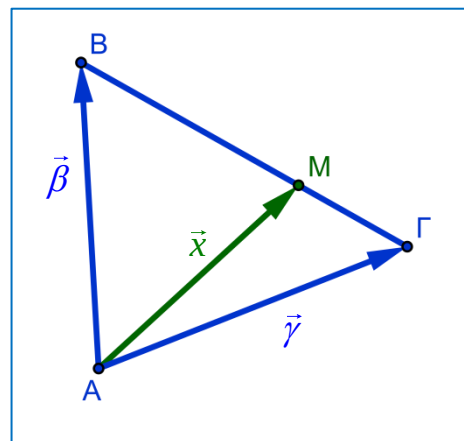
1.115. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M της πλευράς $B\Gamma$, ώστε $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{1}{2}$.

α. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{AM}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$.

β. Έστω επίσης το σημείο Δ για το οποίο ισχύει: $\vec{A\Delta} + \vec{\Gamma\Delta} = 4\vec{AB} + \vec{AG}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , Δ και M είναι συνευθειακά.

1.116. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $(BM) = 2(M\Gamma)$ να αποδείξετε ότι $\vec{x} = \frac{\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}}{3}$

(Σχολικό βιβλίο – Α3)



1.117. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E της πλευράς $\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $E\Delta = 2E\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\vec{B\Delta} + 2\vec{A\Gamma} = 3\vec{AE} - \vec{AB}$.

1.118. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{r}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α, Β και Μ αντιστοίχως και $\frac{MA}{MB} = \frac{\kappa}{\lambda}$, να αποδείξετε ότι αν το Μ είναι εσωτερικό του ΑΒ

$$\text{τότε } \vec{r} = \frac{\lambda \vec{\alpha} + \kappa \vec{\beta}}{\lambda + \kappa}.$$

(Σχολικό βιβλίο – Β4)

1.119. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η διάμεσός του. Πάνω στα τμήματα ΑΒ, ΑΜ και ΑΓ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ έτσι ώστε να είναι

$$(A\Delta) = \frac{1}{2}(AB), (AE) = \frac{1}{3}(AM) \text{ και } (AZ) = \frac{1}{4}(AG). \text{ Να δείξετε ότι τα σημεία}$$

Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.